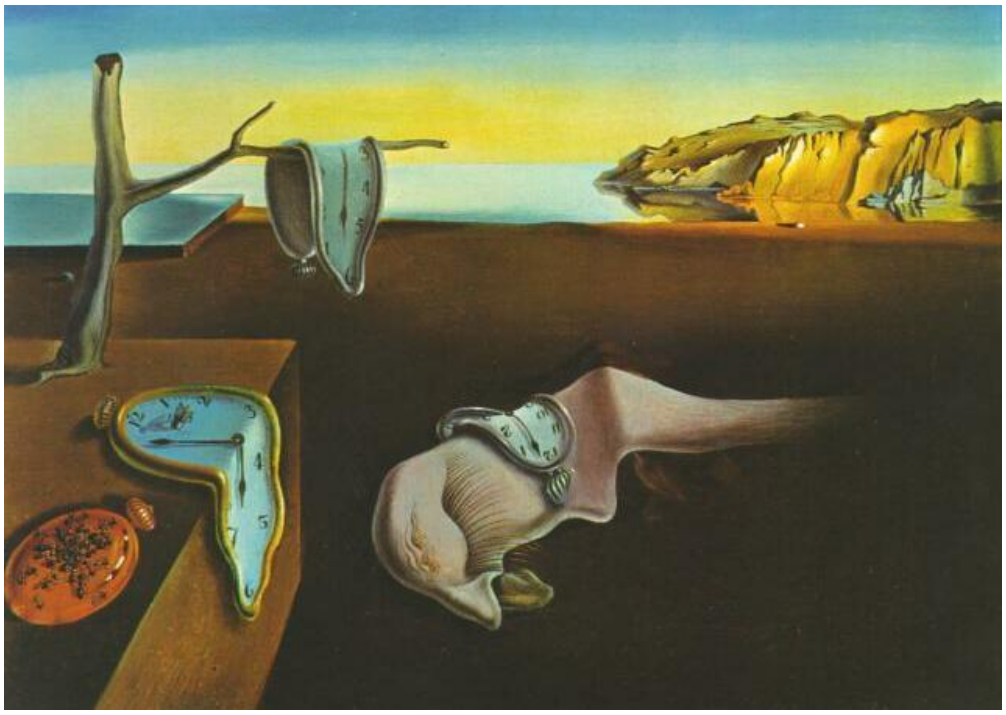
Notas de Relatividad general



Luis J. Garay

Madrid, 5 de octubre de 2009

Universidad Complutense de Madrid
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA II
Avda. Complutense s/n, E-28040 Madrid, España

Luis J. Garay luis.garay@fis.ucm.es
Tel.: + 34 913945170, Fax: + 34 913944557
http://jacobi.fis.ucm.es/lgaray

La persistencia de la memoria
Salvador Dalí (1931)
The Museum of Modern Art, New York

Prefacio

Estas notas no son otra cosa que mis apuntes personales, que he ido elaborando con el único objeto de que me sean útiles en la enseñanza de la asignatura de Relatividad general. Aunque probablemente estas notas os sean útiles también a vosotros, no debéis olvidar que, en ningún caso, pueden sustituir a la bibliografía de la asignatura.

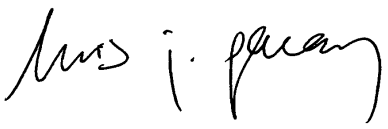
En este sentido, es necesario hacer algunas advertencias:

- Estas notas no son, ni pretenden ser, un libro ni un manual. Son, una vez más, mis apuntes personales.
- No me hago responsable de los errores que puedan contener estas notas ni del uso que hagáis de las mismas. La bibliografía pertinente es, sin duda, el medio más adecuado para obtener los conocimientos necesarios.
- Son una notas incompletas cuyo contenido no va más allá de los temas tratados en la asignatura de Relatividad general.

Agradecería que me comunicaseis cualquier errata que pudieseis encontrar. Sin duda alguna, serán muchas.

De hecho, quiero dar las gracias a todos los alumnos que han seguido este curso por haber contribuido notablemente a disminuir el número de errores contenidos en estas notas.

Recibid un saludo de mi parte,



Bibliografía

[1] S.M. Carroll, *Lecture notes on general relativity,* http://es.arxiv.org/abs/gr-qc/9712019.

[2] R.M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).

[3] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, 1973).

[4] C.W. Misner, K.S. Thorne y J.A. Wheeler, *Gravitation,* Freeman and Co., 1973.

[5] H. Stephani, *General relativity, An introduction to the theory of the gravitational field,* Cambridge University Press, 1990.

[6] I. Ciufolini y J.A. Wheeler, *Gravitation and inertia,* Princeton Univ. Press, 1995.

[7] J. Stewart, *Advanced general relativity,* Cambridge University Press, 1993.

[8] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum y E. Schmutzer, *Exact solutions of Einstein's field equations,* Cambridge University Press, 1981.

[9] A.P. Lightman, W.H. Press, R.H. Price y S.A. Teukolsky, *Problem book in relativity and gravitation,* Princeton University Press, 1975.

[10] J. Foster y J.D. Nightingale, *A short course in general relativity,* 2ª edición, Springer, 1995.

[11] B.F. Schutz, *A first course in general relativity,* Cambridge University Press, 1985.

[12] E. Poisson, *An advanced course in general relativity,* http://www.physics.uoguelph.ca/poisson/research/agr.pdf.

[13] P.K. Townsend, *Black holes,* http://es.arxiv.org/abs/gr-qc/9707012.

[14] L.J. Garay, *Notas de Física de agujeros negros,* http://jacobi.fis.ucm.es/lgaray.

Índice

1. Geometría diferencial **1–1**

1.1. Variedades diferenciables 1–3

1.1.1. Estructura diferenciable 1–3

1.1.2. Tensores 1–4

1.1.2.1. Vectores 1–4

1.1.2.2. Uno-formas 1–5

1.1.2.3. Campos tensoriales 1–6

1.1.3. Aplicaciones diferenciables. Difeomorfismos 1–8

1.1.3.1. Aplicaciones diferenciables 1–8

1.1.3.2. Difeomorfismos 1–9

1.1.3.3. Inmersiones y embebimientos 1–9

1.1.4. Derivada de Lie 1–10

1.2. Conexiones. Curvatura 1–11

1.2.1. Derivación covariante 1–11

1.2.2. Transporte paralelo 1–14

1.2.2.1. Geodésicas 1–14

1.2.2.2. Coordenadas normales 1–15

1.2.3. Tensores de Riemann y de Ricci 1–16

1.2.4. Desviación geodésica 1–16

1.3. Variedades diferenciables pseudoriemannianas 1–17

1.3.1. Métrica 1–17

1.3.2. Conexión de Levi-Civita 1–19

1.3.3. Geodésicas como principio variacional 1–21

1.3.4. Hipersuperficies 1–22

1.3.4.1. Embebimientos 1–22

1.3.4.2. Primera forma fundamental 1–23
1.3.4.3. Segunda forma fundamental 1–24
1.3.5. Isometrías 1–24
1.3.5.1. Isometrías propias 1–24
1.3.5.2. Variedades estacionarias y estáticas 1–25
1.3.5.3. Isometrías conformes 1–25
1.4. Formas diferenciales 1–26
1.4.1. Formas 1–26
1.4.2. Derivación 1–27
1.4.3. Integración 1–28
1.4.3.1. Teorema de Stokes 1–28
1.4.3.2. Elementos de volumen 1–29
1.4.3.3. Teorema de Gauss 1–30
1.5. Interludio: principios de covariancia 1–31
1.6. Ejercicios 1–35

2. Mecánica newtoniana y relatividad especial 2–1
2.1. Mecánica newtoniana 2–3
2.1.1. Espaciotiempo galileano 2–3
2.1.2. Espaciotiempo newtoniano 2–5
2.1.3. El campo gravitatorio como fuerza externa 2–8
2.1.4. El principio de covariancia especial de Galileo 2–9
2.2. Relatividad especial 2–10
2.3. Resumen 2–12
2.4. Ejercicios 2–15

3. Teoría general de la relatividad 3–1
3.1. La variedad espaciotemporal 3–3
3.2. Los campos materiales 3–4
3.2.1. Postulados 3–4
3.2.2. Sistemas lagrangianos 3–6
3.2.3. Fluidos perfectos 3–8
3.2.4. Condiciones de energía 3–10
3.2.5. Aproximación newtoniana 3–12

3.2.5.1. Gravedad newtoniana 3–12
3.2.5.2. Fluidos newtonianos 3–13
3.3. Dinámica del campo gravitatorio 3–13
3.3.1. Motivación 3–13
3.3.2. Ecuaciones dinámicas del campo gravitatorio 3–15
3.3.3. Principio variacional 3–17
3.3.4. Ligaduras y ecuaciones dinámicas 3–18
3.3.4.1. Campo electromagnético 3–18
3.3.4.2. Campo gravitatorio 3–19
3.4. Estrellas relativistas (esféricas y estáticas) 3–20
3.4.1. Ecuaciones dinámicas 3–20
3.4.2. Solución exterior 3–22
3.4.3. Solución interior 3–22
3.4.4. Límite newtoniano 3–24
3.4.5. Colapso gravitatorio 3–24
3.5. Ejercicios 3–27

4. Estructura global del espaciotiempo 4–1
4.1. Propiedades globales 4–3
4.1.1. Diagramas de Penrose 4–3
4.1.2. Planitud asintótica 4–5
4.1.3. Hiperbolicidad global 4–6
4.1.4. Horizontes de sucesos 4–7
4.1.5. Singularidades desnudas 4–8
4.2. El espaciotiempo de Schwarzschild 4–8
4.2.1. Singularidad desnuda para $M < 0$ 4–9
4.2.2. Extensión analítica máxima 4–9
4.2.3. Diagrama de Penrose 4–11
4.3. El espaciotiempo de Kerr 4–12
4.3.1. Solución de Kerr con singularidad desnuda 4–13
4.3.2. Solución de Kerr no degenerada 4–15
4.3.2.1. Diagramas de Penrose 4–16
4.3.2.2. Inestabilidad de los horizontes de Cauchy 4–18

4.3.3. Solución extrema de Kerr 4–21
4.3.4. Ergosfera. Proceso de Penrose 4–21
4.4. Singularidades 4–24
4.4.1. Congruencias 4–24
4.4.1.1. Congruencias de geodésicas temporales 4–24
4.4.1.2. Congruencias de geodésicas nulas 4–28
4.4.1.3. Superficies atrapadas 4–29
4.4.2. Teoremas de singularidad 4–29
4.4.3. Caracterización de las singularidades 4–32
4.5. Ejercicios 4–35

5. Formulación hamiltoniana **5–1**
5.1. Descomposición 3 + 1 5–3
5.2. Hamiltoniano 5–4
5.2.1. Campos materiales 5–4
5.2.2. Campo gravitatorio 5–4
5.2.3. Hamiltoniano total 5–7
5.2.4. Dinámica hamiltoniana 5–7
5.3. Álgebra de ligaduras y difeomorfismos espaciotemporales . . . 5–9
5.4. Términos de superficie. Masa y momento angular ADM 5–12
5.5. Ejercicios 5–15

6. Radiación gravitatoria **6–1**
6.1. Propagación y generación *(por Javier Olmedo)* 6–3
6.1.1. Linealización de las ecuaciones de Einstein en vacío . . . 6–3
6.1.2. Ondas planas y polarizaciones 6–4
6.1.3. Radiación cuadrupolar 6–7
6.1.4. Energía gravitatoria 6–9
6.2. Detección *(por Eduardo Martín)* 6–10
6.2.1. Precisión de los detectores 6–11
6.2.2. Antena de Weber 6–12
6.2.2.1. Modelo de detector 6–13
6.2.2.2. Características espectrales 6–15
6.2.2.3. Sección eficaz 6–17

6.2.2.4. Límites de resolución 6–18
6.2.3. Detectores interferométricos 6–18
6.3. Ejercicios 6–21

7. Relatividad computacional *(por David Yllanes)* **7–1**
7.1. Relatividad numérica 7–3
7.1.1. El problema 7–5
7.1.2. Formalismo ADM–BSSN 7–5
7.1.3. Formulaciones armónicas 7–6
7.1.4. Colisión de agujeros negros 7–7
7.2. Relatividad algebraica 7–9
7.2.1. Los escalares del tensor de Riemann 7–11

A. Topología **A–1**

Tema 1

Geometría diferencial

1.1. Variedades diferenciables
- 1.1.1. Estructura diferenciable
- 1.1.2. Tensores
  - 1.1.2.1. Vectores
  - 1.1.2.2. Uno-formas
  - 1.1.2.3. Campos tensoriales
- 1.1.3. Aplicaciones diferenciables. Difeomorfismos
  - 1.1.3.1. Aplicaciones diferenciables
  - 1.1.3.2. Difeomorfismos
  - 1.1.3.3. Inmersiones y embebimientos
- 1.1.4. Derivada de Lie

1.2. Conexiones. Curvatura
- 1.2.1. Derivación covariante
- 1.2.2. Transporte paralelo
  - 1.2.2.1. Geodésicas
  - 1.2.2.2. Coordenadas normales
- 1.2.3. Tensores de Riemann y de Ricci
- 1.2.4. Desviación geodésica

1.3. Variedades diferenciables pseudoriemannianas
- 1.3.1. Métrica
- 1.3.2. Conexión de Levi-Civita
- 1.3.3. Geodésicas como principio variacional
- 1.3.4. Hipersuperficies
  - 1.3.4.1. Embebimientos
  - 1.3.4.2. Primera forma fundamental
  - 1.3.4.3. Segunda forma fundamental
- 1.3.5. Isometrías
  - 1.3.5.1. Isometrías propias
  - 1.3.5.2. Variedades estacionarias y estáticas
  - 1.3.5.3. Isometrías conformes

1.4. Formas diferenciales
1.4.1. Formas
1.4.2. Derivación
1.4.3. Integración
1.4.3.1. Teorema de Stokes
1.4.3.2. Elementos de volumen
1.4.3.3. Teorema de Gauss
1.5. Interludio: principios de covariancia
1.6. Ejercicios

1.1. Variedades diferenciables

1.1.1. Estructura diferenciable

El concepto de variedad diferenciable es la generalización del de superficie en $\mathbb{R}^3$. En otras palabras, una variedad diferenciable es un conjunto que, localmente, es como $\mathbb{R}^n$, es decir, que se puede cubrir mediante cartas coordenadas. Formalicemos esta definición.

Una *variedad topológica* es un espacio topológico $\mathscr{M}$ Hausdorff tal que todo punto posee un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una *carta* $(\mathscr{U}, \phi)$ de $\mathscr{M}$ es un subconjunto $\mathscr{U}$ de $\mathscr{M}$ y un homeomorfismo $\phi : \mathscr{U} \to \phi(\mathscr{U}) \subset \mathbb{R}^n$. Un *atlas* C^∞ de $\mathscr{M}$ es un conjunto de cartas $\{(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tales que

- cubren todo $\mathscr{M}$, es decir, tales que $\mathscr{M} = \cup_\alpha \mathscr{U}_\alpha$;
- satisfacen la condición de *compatibilidad de cartas* (ver figura 1.1): si dos cartas solapan, $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \neq \emptyset$, entonces la función de transición entre ambas $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta) \to \phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta)$ es una función C^∞ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

  Debe notarse que, si bien las funciones de transición deben ser C^∞, las cartas ϕ_α no necesitan satisfacer esta condición y, de hecho, basta con que sean continuas.

Una *variedad diferenciable* C^∞ es una variedad topológica $\mathscr{M}$ que posee un atlas C^∞. Todas las variedades diferenciables que nosotros consideraremos serán paracompactas.

Llamaremos *coordenadas* x^μ del punto $p \in \mathscr{M}$, asociadas a una carta $(\mathscr{U}, \phi)$ que lo contenga, a las coordenadas en $\mathbb{R}^n$ de $\phi(p)$.

Dada una función $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$, llamaremos de la misma manera a su análoga en términos de coordenadas locales, es decir, dada $f(p)$, definiremos $f(x^\mu) \equiv f \circ \phi^{-1}(x^\mu) = f(p)$. Diremos que f es una función *suave* o C^∞ si y solo si lo es $f \circ \phi^{-1}$ y llamaremos $\mathcal{F}_\mathscr{M}$ al conjunto de todas las funciones suaves definidas sobre la variedad $\mathscr{M}$.

Una variedad (diferenciable) $\mathscr{M}$ es *orientable* si y solo si admite un atlas tal que para cada par de abiertos $\mathscr{U}$ y $\mathscr{U}'$ no disjuntos, el jacobiano $\det(\partial x^\mu / \partial x'^\nu)$ es positivo.

Una *variedad diferenciable con frontera* $\mathscr{M}$ se define de forma análoga sustituyendo $\mathbb{R}^n$ por $\frac{1}{2}\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0\}$ en la definición anterior. La frontera $\partial\mathscr{M}$ de la variedad diferenciable es el conjunto de puntos de $\mathscr{M}$ cuya imagen mediante ϕ_α es la frontera de $\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$. Se puede demostrar que $\partial\mathscr{M}$ es una variedad diferenciable $(n-1)$-dimensional sin frontera (EJERCICIO).

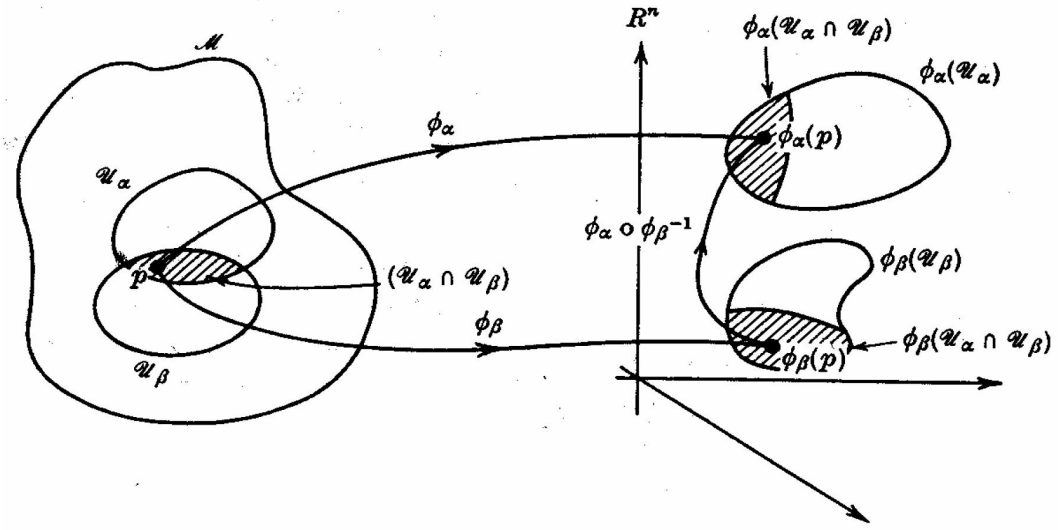


Figura 1.1: Ilustración de la condición de compatibilidad de dos cartas.

1.1.2. Tensores

1.1.2.1. Vectores

Comenzaremos definiendo tensores en un punto de la variedad. Un campo tensorial es un tensor definido en cada punto de la variedad.

Dada una parametrización $\gamma(t)$ de clase C^∞ de una curva en $\mathscr{M}$, definimos el *vector* $\boldsymbol{v}_{\gamma(t_0)}$ *tangente* a la misma en el punto $\gamma(t_0)$ como el operador que asigna a cada función f de clase C^∞ el número $\boldsymbol{v}(f)|_{\gamma(t_0)} \equiv \partial_t(f \circ \gamma)|_{t_0}$. A la vista de esta actuación, también se utiliza el símbolo ∂_t para designar al vector tangente a una parametrización.

En términos de las coordenadas locales $\gamma^\mu(t)$ del punto $\gamma(t)$,

$$\boldsymbol{v}(f)|_{\gamma(t_0)} = \partial_t\gamma^\mu|_{t_0}\partial_\mu f|_{\gamma(t_0)}.$$

[Más estrictamente, si ϕ es una carta tal que $(\phi\circ\gamma)^\mu(t) = \gamma^\mu(t)$, entonces se verifica que $\boldsymbol{v}(f)|_{\gamma(t_0)} = \partial_t\gamma^\mu|_{t_0}\partial_\mu(f \circ \phi^{-1})|_{\gamma^\mu(t_0)}$]. Por tanto, cualquier vector en $p = \gamma(t_0)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{e}_\mu|_p$ cuya actuación sobre funciones es $\boldsymbol{e}_\mu(f)|_p = \partial_\mu f|_p$ (también se utiliza el símbolo ∂_μ para denotar al vector $\boldsymbol{e}_\mu$). Por otro lado, cualquier combinación lineal $v^\mu\boldsymbol{e}_\mu|_p$ es un vector tangente a una parametrización $\gamma(t)$ cuyas coordenadas son $\gamma^\mu(t) = x^\mu(p) + tv^\mu$.

El conjunto $T_p\mathscr{M}$ de todos los vectores $\boldsymbol{v}|_p$ en p es un espacio vectorial cuya dimensión coincide con la de $\mathscr{M}$ llamado *espacio vectorial tangente* de $\mathscr{M}$ en p y que abreviaremos por T_p. El conjunto de vectores $\{\boldsymbol{e}_\mu|_p,\ \mu = 1\cdots n\}$ es una

base coordenada de T_p, es decir, $\boldsymbol{v}|_p \in T_p$ si y solo si $\boldsymbol{v}|_p = v^\mu \boldsymbol{e}_\mu|_p$. A partir de ahora, omitiremos la evaluación $|_p$ en el punto p en la notación cuando no exista riesgo de confusión.

Dos bases coordenadas $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ y $\{\boldsymbol{e}'_\mu\}$ asociadas a las coordenadas x^μ y x'^μ, respectivamente, están relacionadas mediante la expresión

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\boldsymbol{e}_\nu, \qquad \partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu,$$

como se puede deducir de su definición (EJERCICIO).

Un *campo vectorial* sobre $\mathscr{M}$ es una asignación de un vector del espacio tangente T_p a cada punto p de la variedad tal que sus componentes en cualquier base coordenada sean C^∞.

Además de las bases coordenadas, es posible utilizar otras bases más generales cuyos elementos no admiten la descripción en términos de coordenadas. En una de estas bases $\{\boldsymbol{e}_a,\ a = 1 \cdots n\}$, el vector $\boldsymbol{v}$ adquiere la expresión $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{e}_a$, donde v^a son las componentes de $\boldsymbol{v}$ en esa base. Es importante notar que la distinción entre bases coordenadas y bases no coordenadas tiene sentido solo sobre regiones extensas —abiertos— de la variedad, como veremos en § 1.1.4.

A menudo, utilizaremos la notación de índices abstractos. En esta notación, denotaremos por v^a tanto a las componentes del vector $\boldsymbol{v}$ en una base arbitraria $\{\boldsymbol{e}_a\}$ como al vector en sí. Utilizaremos índices griegos para las bases coordenadas[1].

1.1.2.2. Uno-formas

Definimos una *uno-forma* $\boldsymbol{\omega}$ en el punto p como una aplicación lineal real sobre el espacio tangente T_p:

$$\boldsymbol{\omega} : T_p \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{v} \rightsquigarrow \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} \rangle.$$

Dada una base cualquiera $\{\boldsymbol{e}_a\}$ de vectores en p (nótese que esta base no tiene que ser necesariamente una base coordenada de la forma $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$), existe un único conjunto de n uno-formas $\{\boldsymbol{e}^a\}$ tal que $\langle \boldsymbol{e}^a, \boldsymbol{e}_b \rangle = \delta^a{}_b$. Este conjunto es linealmente independiente y forma, por tanto, una base (llamada *base dual* de $\{\boldsymbol{e}_a\}$) del espacio vectorial T_p^* de uno-formas en p llamado *espacio dual* o, también, *espacio vectorial cotangente* de $\mathscr{M}$ en p.

Dados un vector $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{e}_a$ y una uno-forma $\boldsymbol{\omega} = \omega_a \boldsymbol{e}^a$ arbitrarios, la actuación de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\boldsymbol{v}$ es $\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} \rangle = \omega_a v^a$. Vemos así que el espacio vectorial tangente

[1] Nótese que esta notación es ligeramente diferente a la utilizada en la referencia [2]: utilizaremos los índices griegos solo para bases coordenadas. En dicha referencia, se utilizan índices griegos para bases específicas, sean coordenadas o no.

actúa también linealmente sobre T_p^* y que es, de hecho, su espacio dual, es decir, $T_p^{**} = T_p$.

Cada función f sobre $\mathscr{M}$ define una uno-forma $\mathrm{d}f|_p$ en p, llamada *diferencial* de la función, que actúa de la siguiente forma:

$$\langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}(f).$$

La diferencial es la generalización del gradiente en $\mathbb{R}^n$: la actuación de $\mathrm{d}f$ sobre un vector $\boldsymbol{v}$ nos da la derivada de f en la dirección de $\boldsymbol{v}$. Dada la base $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ asociada a las coordenadas x^μ y su base dual $\{\boldsymbol{e}^\mu\}$, vemos que $\langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{e}_\mu \rangle = \boldsymbol{e}_\mu(f) = \partial_\mu f$ y, por tanto, $\mathrm{d}f = \partial_\mu f \boldsymbol{e}^\mu$. Por esta razón, a menudo se utiliza $\mathrm{d}x^\mu$ para representar los elementos $\boldsymbol{e}^\mu$ de la base coordenada de uno-formas, dual a $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$, de forma que $\mathrm{d}f = \partial_\mu f \mathrm{d}x^\mu$.

El conjunto $\mathscr{V} = \{p \mid f(p) = 0,\ \mathrm{d}f|_p \neq 0\} \subset \mathscr{M}$ es una variedad diferenciable de dimensión $n-1$ y su espacio lineal tangente $T_p(\mathscr{V})$ es el subespacio de $T_p(\mathscr{M})$ aniquilado por $\mathrm{d}f|_p$, es decir, los vectores $\boldsymbol{v}|_p$ tales que $\langle \mathrm{d}f|_p, \boldsymbol{v}|_p \rangle = 0$ son tangentes a parametrizaciones de curvas de $\mathscr{V}$. Esta variedad $(n-1)$-dimensional es una *hipersuperficie*.

Los cambios de bases coordenadas están dados por la expresión (EJERCICIO)

$$\boldsymbol{e}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \boldsymbol{e}^\nu, \qquad \mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu,$$

de forma que $\langle \boldsymbol{e}'^\mu, \boldsymbol{e}'_\nu \rangle = \langle \boldsymbol{e}^\mu, \boldsymbol{e}_\nu \rangle = \delta^\mu{}_\nu$.

1.1.2.3. Campos tensoriales

Un *tensor* $\boldsymbol{T}$ de tipo (r,s) es una aplicación lineal que actúa sobre el producto cartesiano $T_p^* \times \overset{r}{\cdots} \times T_p^* \times T_p \times \overset{s}{\cdots} \times T_p$. El conjunto $\{\boldsymbol{e}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{a_r} \otimes \boldsymbol{e}^{b_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{b_s}\}$ es una base del espacio vectorial $T^r_s(p) = T_p \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes \overset{s}{\cdots} \otimes T_p^*$, cuya dimensión es n^{r+s}, obtenido mediante *producto tensorial*. Los tensores de tipo $(r,0)$ reciben el nombre de *tensores contravariantes* y los de tipo $(0,s)$ *tensores covariantes*.

Las *operaciones tensoriales* son aquellas que preservan el carácter tensorial, aunque algunas de ellas pueden cambiar el tipo de tensor. Por tanto, el resultado de estas operaciones es independiente de la base que se utilice para realizarlas.

- Operaciones que preservan el tipo tensorial:
  - Suma de dos tensores del mismo tipo y multiplicación de un tensor por un escalar. Estas dos operaciones dotan al espacio $T^r_s(p)$ de tensores en p de tipo (r,s) con la estructura de espacio vectorial real.

- Dado un tensor $\boldsymbol{T}$ de componentes $T^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s}$ en una base arbitraria, se define su *parte simétrica* en los índices covariantes como el tensor de componentes

$$T^{a_1\cdots a_r}{}_{(b_1\cdots b_s)} = \frac{1}{s!}\sum_{\pi} T^{a_1\cdots a_r}{}_{\pi(b_1)\cdots\pi(b_s)},$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones $\pi(b_1)\cdots\pi(b_s)$ de los índices $b_1\cdots b_s$. Se define su *parte antisimétrica* en los índices covariantes como el tensor

$$T^{a_1\cdots a_r}{}_{[b_1\cdots b_s]} = \frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi} T^{a_1\cdots a_r}{}_{\pi(b_1)\cdots\pi(b_s)},$$

donde $(-1)^{\pi}$ toma valores positivos o negativos para permutaciones pares o impares respectivamente. De forma análoga, se definen las (anti)simetrizaciones de los índices contravariantes o de subconjuntos de índices del mismo tipo.

- Operaciones que *no* preservan el tipo tensorial:

- Producto tensorial de dos tensores. Dados dos tensores $\boldsymbol{R} \in T^r_s(p)$ y $\boldsymbol{T} \in T^p_q(p)$ cuyas componentes son $R^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s}$ y $T^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s}$ respectivamente, su producto tensorial $\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T} \in T^{r+p}_{s+q}(p)$ tiene como componentes

$$(\boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{T})^{a_1\cdots a_{r+p}}{}_{b_1\cdots b_{s+q}} = R^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s} T^{a_{r+1}\cdots a_{r+p}}{}_{b_{s+1}\cdots b_{s+q}}.$$

Puesto que la operación producto tensorial $\otimes$ es bilineal, dota a los espacios $T^r_s(p)$ con la estructura de álgebra.

- Dado un tensor $\boldsymbol{T}$ de componentes $T^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s}$, definimos su contracción con respecto a los primeros índices como el tensor de componentes $T^{a_1\cdots a_r}{}_{a_1\cdots b_s}$ y análogamente para cualquier otro par de índices, uno covariante y otro contravariante. Si fuesen los dos índices fuesen del mismo tipo, el resultado dependería de la base utilizada (EJERCICIO).

Un *campo tensorial* $\boldsymbol{T}$ de clase C^∞ y de tipo (r,s) es una asignación C^∞ de un elemento de $T^r_s(p)$ a cada punto $p \in \mathscr{M}$ de manera que sus componentes en cualquier base coordenada sean C^∞.

1.1.3. Aplicaciones diferenciables. Difeomorfismos

1.1.3.1. Aplicaciones diferenciables

Diremos que $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ es una *aplicación de clase* C^∞ si y solo si dado cualquier par de atlas $\{(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y $\{(\mathscr{V}_\beta, \psi_\beta)\}$ de $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$, respectivamente, las funciones $\psi_\beta \circ \varphi \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son de clase C^∞ o, lo que es lo mismo, si y solo si, dados dos sistemas de coordenadas locales, las coordenadas de la imagen $q = \varphi(p) \in \mathscr{N}$ de un punto $p \in \mathscr{M}$ son funciones C^∞ de las coordenadas de p.

- La aplicación φ induce una aplicación lineal φ^*, llamada *pull-back*, entre los espacios de funciones $\mathcal{F}_\mathscr{N}$ y $\mathcal{F}_\mathscr{M}$ mediante la siguiente regla[2]: dada una función $f : \mathscr{N} \to \mathbb{R}$, su *pull-back* $\varphi^* f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ es tal que $\varphi^* f(p) = f \circ \varphi(p) = f(q)$.

  Notemos que, en general, no es posible definir la aplicación *push-forward* φ_* análoga entre los espacios de funciones $\mathcal{F}_\mathscr{M}$ y $\mathcal{F}_\mathscr{N}$ ya que necesitaríamos hacer uso de φ^{-1} que, en general, no existe. En efecto, dada $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$, la aplicación $\varphi_* f : \mathscr{N} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla $\varphi_* f(q) = f \circ \varphi^{-1}(q)$ no es una función.

- La aplicación φ induce una aplicación *push-forward* φ_* entre los espacios tangentes $T_p\mathscr{M}$ y $T_{\varphi(p)}\mathscr{N}$ mediante la siguiente regla: si $\boldsymbol{v} \in T_p\mathscr{M}$, entonces $\varphi_* \boldsymbol{v}$ es un vector de $T_{\varphi(p)}\mathscr{N}$ tal que su actuación sobre una función $f \in \mathcal{F}_\mathscr{N}$ está dada por $\varphi_* \boldsymbol{v}(f)|_{\varphi(p)} = \boldsymbol{v}(\varphi^* f)|_p$. Notemos que no es posible definir la aplicación *pull-back* sobre vectores ya que necesitaríamos hacer uso de φ^{-1}.

- La aplicación φ induce una aplicación *pull-back* entre los espacios cotangentes $T^*_{\varphi(p)}\mathscr{N}$ y $T^*_p\mathscr{M}$ mediante la siguiente regla: si $\boldsymbol{\omega} \in T^*_{\varphi(p)}\mathscr{N}$, entonces $\varphi^* \boldsymbol{\omega}$ es una uno-forma de $T^*_p\mathscr{M}$ cuya actuación sobre vectores de $T_p\mathscr{M}$ es $\langle \varphi^* \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} \rangle|_p = \langle \boldsymbol{\omega}, \varphi_* \boldsymbol{v} \rangle|_{\varphi(p)}$. En particular, es fácil ver que, si $f \in \mathcal{F}_\mathscr{N}$, entonces $\varphi^*(\mathrm{d}f)|_p = \mathrm{d}(\varphi^* f)|_{\varphi(p)}$; en efecto,

$$\langle \varphi^*(\mathrm{d}f), \boldsymbol{v} \rangle|_p = \langle \mathrm{d}f, \varphi_* \boldsymbol{v} \rangle|_{\varphi(p)} = \varphi_* \boldsymbol{v}(f)|_{\varphi(p)} = \boldsymbol{v}(\varphi^* f)|_p = \langle \mathrm{d}(\varphi^* f), \boldsymbol{v} \rangle|_p.$$

- Podemos definir la aplicación *pull-back* sobre tensores covariantes y la aplicación *push-forward* sobre tensores contravariantes de forma completamente análoga (EJERCICIO).

[2] Nótese que, dependiendo de las referencias, el símbolo $*$ puede aparecer como subíndice o como superíndice y tienen distinto significado, en particular, si φ no es un difeomorfismo.

1.1.3.2. Difeomorfismos

Una aplicación $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ es un *difeomorfismo* si y solo si tanto ella como su inversa son biyecciones de clase C^∞.

Si φ es un difeomorfismo, entonces φ^{-1} es una aplicación C^∞ bien definida, por lo que podemos extender la definición de las aplicaciones *pull-back* φ^* y *push-forward* φ_* para cualquier tipo de tensores notando que $\varphi_* = (\varphi^{-1})^*$ y que $\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$ (EJERCICIO). Además, ambas aplicaciones son isomorfismos entre los espacios tensoriales $T^r_s(p)$ y $T^r_s[\varphi(p)]$ y preservan, por tanto, el tipo, las simetrías y las operaciones tensoriales.

Los difeomorfismos pueden interpretarse como cambios "activos" de coordenadas. En efecto, dado un difeomorfismo φ y una carta $(\mathscr{U}, \phi)$ que contenga a p y otra $(\mathscr{V}, \psi)$ que contenga a $q = \varphi(p)$, la aplicación $\phi' = \psi \circ \varphi$ que asigna a p las coordenadas de q, junto con el abierto $\mathscr{U}' = \varphi^{-1}[\varphi(\mathscr{U}) \cap \mathscr{V}]$, es una carta que contiene al punto p.

Dado un campo vectorial $\boldsymbol{\xi}$, por cada punto pasa una única curva parametrizada por $\gamma_p(t)$ tal que $\gamma_p(0) = p$ y cuyo vector tangente es $\boldsymbol{\xi}|_{\gamma_p(t)}$. Para demostrarlo basta con notar que la ecuación de la *curva integral* de $\boldsymbol{\xi}$ que pasa por el punto p en coordenadas locales es $\partial_t \gamma^\mu_p(t) = \xi^\mu[\gamma^\nu_p(t)], \quad \gamma^\mu_p(0) = x^\mu$, donde x^μ son las coordenadas de p. La existencia y unicidad de la solución está garantizada por el teorema correspondiente para ecuaciones diferenciales ordinarias.

El campo vectorial $\boldsymbol{\xi}$ es el *generador* de un conjunto de difeomorfismos locales (uno por cada valor suficientemente pequeño de t) $\varphi_t : \mathscr{U} \to \varphi_t(\mathscr{U})$ tal que $\varphi_t(p) = \gamma_p(t)$ denominado *flujo local* de $\boldsymbol{\xi}$. Obviamente, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ por lo que los difeomorfismos locales constituyen un grupo.

1.1.3.3. Inmersiones y embebimientos

Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ dos variedades diferenciables de clase C^∞ y sea $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ una aplicación entre ellas.

1. φ es una *inmersión* si y solo si tanto ella como su inversa son de clase C^∞ localmente, es decir, si y solo si para cada $p \in \mathscr{M}$ existe un abierto $\mathscr{U}$ tal que $\varphi : \mathscr{U} \to \varphi(\mathscr{U})$ es un difeomorfismo.

2. φ es un *embebimiento* si y solo si es una inmersión y un homeomorfismo en su imagen $\varphi(\mathscr{M})$, es decir, si y solo si φ es un difeomorfismo en su imagen.

Notemos que una inmersión admite intersecciones en $\varphi(\mathscr{M})$ pero un embebimiento no.

1.1.4. Derivada de Lie

Para comparar un tensor en dos puntos diferentes p y q necesitamos los isomorfismos *pull-back* y *push-forward* puesto que, dado un campo tensorial $\boldsymbol{T}$, los tensores $\boldsymbol{T}|_p$ y $\boldsymbol{T}|_q$ pertenecen a distintos espacios y no es posible compararlos. Si existe un difeomorfismo $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ tal que $\varphi(p) = q$, entonces existe un isomorfismo entre los espacios tensoriales correspondientes que convierte tensores de un espacio en tensores del otro. Ahora vamos a ver cuál es la diferencia de un campo tensorial entre puntos arbitrariamente cercanos.

Dado un campo tensorial $\boldsymbol{T}$, definimos su derivada de Lie a lo largo del campo vectorial $\boldsymbol{\xi}$ mediante la expresión

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{T}|_p = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^*(\boldsymbol{T}|_{\varphi_t(p)})|_p - \boldsymbol{T}|_p}{t},$$

donde φ_t es el flujo local generado por el campo $\boldsymbol{\xi}$. Esta definición compara el tensor $\boldsymbol{T}_{\varphi_t(p)}$ en el punto $\varphi_t(p)$ con el mismo campo tensorial en el punto p. Para ello hemos necesitado convertir el primer tensor en otro definido en p mediante φ_t^*.

Propiedades de la derivada de Lie (EJERCICIO):

- Preserva el tipo, las simetrías y las operaciones tensoriales (en particular, la contracción) puesto que φ^* lo hace.
- Es lineal.
- Satisface la regla de Leibniz:

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}) = \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} \otimes \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{S}.$$

La derivada de Lie de una función está dada por la actuación del vector sobre la función

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} f = \boldsymbol{\xi}(f),$$

como se deduce directamente de la definición, puesto que para valores de t suficientemente pequeños, $\varphi_t^* f|_p = f[\gamma_p(t)] = f(p) + t\boldsymbol{\xi}(f)|_p$.

La derivada de Lie de un vector es

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}] = -\mathfrak{L}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{\xi},$$

es decir, $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{v}$ es un vector tal que, sobre funciones f actúa de la siguiente forma: $(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{v})(f) = \boldsymbol{\xi}[\boldsymbol{v}(f)] - \boldsymbol{v}[\boldsymbol{\xi}(f)]$. Para demostrarlo, basta con elegir un sistema de coordenadas alrededor de p tal que el vector $\boldsymbol{\xi}$ genere un flujo a lo largo de la

coordenada x^1, es decir $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{e}_1$. Entonces, de la definición de derivada de Lie, vemos que $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v} = \partial_1 \boldsymbol{v}$ cuyas componentes en la base $\boldsymbol{e}_\mu$ son $\partial_1 v^\mu$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}](f) &= [\boldsymbol{e}_1, v^\mu \boldsymbol{e}_\mu](f) = \boldsymbol{e}_1(v^\mu \partial_\mu f) - v^\mu \boldsymbol{e}_\mu(\partial_1 f) \\ &= \partial_1 v^\mu \partial_\mu f = \partial_1 v^\mu \boldsymbol{e}_\mu(f) = (\partial_1 \boldsymbol{v})(f),\end{aligned}$$

es decir, $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}] = \partial_1 \boldsymbol{v}$, lo que implica que ambas expresiones son iguales. Las componentes de $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}$ en coordenadas locales son (EJERCICIO)

$$(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v})^\mu = \xi^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu \xi^\mu.$$

Nótese que los elementos $\boldsymbol{e}_\mu$ de una base coordenada conmutan. De hecho, es posible demostrar que una base del espacio tangente es coordenada si y solo si sus elementos conmutan (EJERCICIO). Vemos, por tanto, que para determinar si una base es coordenada o no es necesario estudiar su comportamiento en regiones extensas, como ya habíamos anticipado en § 1.1.2.1.

La derivada de Lie de una uno-forma $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\omega}$ es tal que para todo vector $\boldsymbol{v}$

$$\langle \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}\rangle = \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{\omega}, \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}\rangle.$$

Sus componentes en coordenadas locales son (EJERCICIO)

$$(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\omega})_\mu = \xi^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu \xi^\nu.$$

EJERCICIO: Calcular las componentes de la derivada de Lie de un tensor arbitrario en una base coordenada.

Puesto que la derivada de Lie de un tensor depende no solo del campo vectorial $\boldsymbol{\xi}$ en el punto p sino también sus alrededores (depende de sus derivadas en p), la derivada de Lie no es adecuada como generalización de la derivada direccional (o lo que es equivalente de derivada parcial). Sin embargo, la derivada de Lie permite decidir si un tensor es invariante bajo difeomorfismos en cierta dirección: lo será si y solo si la derivada de Lie del mismo se anula en esa dirección. En otras palabras, $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$ si y solo si el tensor $\boldsymbol{T}$ se conserva a lo largo del flujo generado por $\boldsymbol{\xi}$.

1.2. Conexiones. Curvatura

1.2.1. Derivación covariante

Una *conexión afín* ∇ es una regla mediante la cual se asigna a cada campo tensorial $\boldsymbol{T}$ de tipo (r, s) y componentes $T^{bc\cdots}{}_{de\cdots}$ otro tensor $\nabla\boldsymbol{T}$ de tipo $(r, s+1)$

y componentes $(\nabla \boldsymbol{T})^{bc\cdots}{}_{de\cdots a} \equiv \nabla_a T^{bc\cdots}{}_{de\cdots} \equiv T^{bc\cdots}{}_{de\cdots;a}$, llamado *derivada covariante* de $\boldsymbol{T}$, que tiene las siguientes propiedades:

- Linealidad: $\nabla(a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{S}) = a\nabla\boldsymbol{T} + b\nabla\boldsymbol{S}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
- Regla de Leibniz: $\nabla(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}) = (\nabla\boldsymbol{T}) \otimes \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} \otimes \nabla\boldsymbol{S}$.
- Conmuta con la contracción.
- Sobre funciones f es simplemente la diferencial: $\nabla f = \mathrm{d}f$.

Dado un vector $\boldsymbol{v}$, llamamos *derivada covariante direccional* de un tensor $\boldsymbol{T}$ de tipo (r, s) a lo largo de $\boldsymbol{v}$ al tensor $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{T}$ de tipo (r, s) cuyas componentes son $v^a \nabla_a T^{bc\cdots}{}_{de\cdots}$.

Aunque las conexiones no son tensores, resulta conveniente introducir sus componentes en una base arbitraria: $\Gamma^a{}_{bc} \equiv \langle \boldsymbol{e}^a, \nabla_{\boldsymbol{e}_c}\boldsymbol{e}_b \rangle$.

EJERCICIO: Demostrar que, bajo cambios de base $\boldsymbol{e}'_{a'} = e_{a'}{}^a \boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}'^{a'} = e^{a'}{}_a \boldsymbol{e}^a$, donde $e^{a'}{}_a = (e^{-1})_a{}^{a'}$, las componentes $\Gamma^a{}_{bc}$ de la conexión ∇ se transforman de la siguiente manera:

$$\Gamma^{a'}{}_{b'c'} = e^{a'}{}_a e_{b'}{}^b e_{c'}{}^c \Gamma^a{}_{bc} + e^{a'}{}_a e_{c'}{}^c \partial_c e_{b'}{}^a,$$

donde ∂_a es la derivada ordinaria expresada en una base arbitraria (por ejemplo, actuando sobre vectores $\partial_a v^b = e_a{}^\mu \partial_\mu (e^b{}_\nu v^\nu)$).

Es posible demostrar (EJERCICIO, ver referencia [2]) que, dadas dos conexiones ∇ y $\tilde{\nabla}$ definidas en la variedad $\mathscr{M}$, su diferencia es un tensor de tipo $(1, 2)$, es decir, que $\nabla - \tilde{\nabla} = -C^c{}_{ba}\boldsymbol{e}_c \otimes \boldsymbol{e}^b \otimes \boldsymbol{e}^a$. Su actuación sobre uno-formas $\boldsymbol{\omega}$ da el tensor $(\nabla - \tilde{\nabla})\boldsymbol{\omega}$ cuyas componentes en una base arbitraria son

$$(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a)\omega_b = -C^c{}_{ba}\omega_c,$$

donde $C^c{}_{ba} = \Gamma^c{}_{ba} - \tilde{\Gamma}^c{}_{ba}$.

EJERCICIO: Demostrar que $(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a)t^b = C^b_{ca}t^c$.

EJERCICIO: Encontrar la expresión de las componentes de $(\nabla - \tilde{\nabla})\boldsymbol{T}$ en una base arbitraria, donde $\boldsymbol{T}$ es un tensor cualquiera.

Consideremos una base coordenada fija de referencia $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$. Entonces, definimos la *derivada covariante ordinaria $\tilde{\partial}$ asociada a esta base coordenada* como la derivada covariante tal que, dado un tensor $\boldsymbol{T}$, las componentes del tensor $\tilde{\partial}\boldsymbol{T}$ en esa base coordenada son $\partial_\mu T^{\rho\cdots}{}_{\sigma\cdots}$. Para ilustrar esta definición, notemos que, en una base arbitraria de vectores $\{\boldsymbol{e}_a = e_a{}^\mu \boldsymbol{e}_\mu\}$ y su base dual $\{\boldsymbol{e}^a = e^a{}_\mu \boldsymbol{e}^\mu\}$, las componentes de la derivada covariante ordinaria asociada a la base de referencia $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ de un vector $\boldsymbol{v}$ serán

$$(\tilde{\partial}\boldsymbol{v})_a{}^b \equiv \tilde{\partial}_a v^b = e_a{}^\mu e^b{}_\nu \partial_\mu v^\nu$$

y no $e_a{}^\mu \partial_\mu (e^b{}_\nu v^\nu) = \partial_a v^b$, que es la derivada ordinaria no covariante. La derivada covariante ordinaria así definida es realmente una derivada covariante (EJERCICIO). Por tanto, su actuación sobre tensores da tensores, lo que significa que sus componentes se transforman adecuadamente bajo cambios de base arbitrarios $\{\boldsymbol{e}_a\} \to \{\boldsymbol{e}'_a\}$. Sin embargo, en estas transformaciones, la base coordenada de referencia permanece fija pues forma parte de la definición de $\tilde{\partial}$. Si cambiamos de base coordenada de referencia $\{\boldsymbol{e}_\mu\} \to \{\bar{\boldsymbol{e}}_\mu\}$, estamos introduciendo una nueva derivada covariante ordinaria $\bar{\tilde{\partial}}$ asociada a la nueva base. Hemos demostrado, por tanto, que al menos existe una derivada covariante (de hecho, existen infinitas) definida sobre cualquier variedad diferenciable: la derivada covariante ordinaria.

En términos de la derivada ordinaria (no covariante) y de las componentes de la conexión, la derivada covariante se puede escribir de la forma (EJERCICIO)

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \Gamma^c{}_{ba} \omega_c, \qquad \nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ca} v^c.$$

Notemos que, dada una derivada covariante ordinaria $\tilde{\partial}$ asociada a una base coordenada, podemos utilizarla para escribir una conexión ∇ cualquiera en términos de ella:

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\partial}_a \omega_b - C^c{}_{ba} \omega_c, \qquad \nabla_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + C^b{}_{ca} v^c.$$

Teniendo en cuenta la relación entre la derivada ordinaria y la derivada covariante ordinaria, podemos escribir el tensor $\boldsymbol{C}$ en función de las componentes de ∇ y de la base coordenada de referencia utilizada para definir $\boldsymbol{C}$:

$$C^b{}_{ca} = \Gamma^b{}_{ca} - e^b{}_\mu \partial_a e^\mu{}_c.$$

Notemos que $\boldsymbol{C}$ es un tensor por ser la diferencia de dos conexiones como hemos visto y, por tanto, sus componentes se transforman adecuadamente bajo cambios de base arbitrarios $\{\boldsymbol{e}_a\} \to \{\boldsymbol{e}'_a\}$ (recordemos que, en estas transformaciones, la base coordenada de referencia permanece fija pues forma parte de la definición de la derivada covariante ordinaria $\tilde{\partial}$). Si cambiamos de base coordenada de referencia $\{\boldsymbol{e}_\mu\} \to \{\bar{\boldsymbol{e}}_\mu\}$, estamos introduciendo una nueva derivada covariante ordinaria $\bar{\tilde{\partial}}$ asociada a la nueva base y el correspondiente nuevo $\bar{\boldsymbol{C}}$ de ∇ respecto a la nueva derivada covariante ordinaria $\bar{\tilde{\partial}}$. Sin embargo, $\Gamma^a{}_{bc}$ no es un tensor, como ya hemos visto.

EJERCICIO: Encontrar la relación entre los tensores $C^a{}_{bc}$ de una conexión ∇ asociados a bases coordenadas diferentes y compararla con la transformación correspondiente de sus componentes $\Gamma^a{}_{bc}$.

Diremos que una conexión afín es *simétrica* si y solo si sobre funciones f actúa de forma simétrica (torsión nula): $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$.

EJERCICIO: Demostrar que la diferencia entre dos conexiones simétricas ∇ y $\tilde{\nabla}$ es un tensor $\boldsymbol{C}$ simétrico en sus índices covariantes, es decir, que $C^a{}_{bc} = C^a{}_{cb}$.

EJERCICIO: Demostrar que la condición de que la conexión sea simétrica implica que $2\Gamma^a_{[bc]}\boldsymbol{e}_a = [\boldsymbol{e}_c, \boldsymbol{e}_b]$ y que, por tanto, en una base coordenada $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}$.

EJERCICIO: Demostrar que $(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w})^a = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]^a = v^b\nabla_b w^a - w^b\nabla_b v^a$ para cualquier conexión afín simétrica definida en $\mathscr{M}$ y cualesquiera dos vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

EJERCICIO: Demostrar que, dada cualquier conexión afín simétrica, la expresión de las componentes de la derivada de Lie de un tensor al largo de un vector se puede escribir en términos de la derivada covariante simplemente sustituyendo las derivadas parciales por las covariantes.

1.2.2. Transporte paralelo

Dada una parametrización de una curva $\gamma(t)$ cuyo vector tangente es $\boldsymbol{w}(t)$, definimos la *derivada covariante* de $\boldsymbol{T}$ a lo largo de la misma como la derivada covariante direccional de $\boldsymbol{T}$ a lo largo de su vector $\boldsymbol{w}$, es decir, $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{T}$.

Diremos que $\boldsymbol{T}$ es *transportado paralelamente* a lo largo de la curva parametrizada por $\gamma(t)$ si y solo si $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{T} = 0$. Los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias garantizan la existencia y unicidad del transporte paralelo y, por tanto, el transporte paralelo establece un isomorfismo entre los espacio tensoriales definidos en cada punto de $\gamma(t)$.

1.2.2.1. Geodésicas

Una curva γ es una *curva geodésica* si y solo si admite una parametrización $\gamma(t)$ cuyo vector tangente $\boldsymbol{w}(t) = \partial_t$ es tal que $\nabla_{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}$ es paralelo (proporcional) a $\boldsymbol{w}$, es decir, $w^a\nabla_a w^b \propto w^b$. Si γ es una curva geodésica, entonces es posible encontrar (EJERCICIO) una reparametrización $\gamma(s) \equiv \gamma[t(s)]$ tal que su vector tangente $\boldsymbol{v}(s) = \partial_s$ es transportado paralelamente a lo largo de la misma, es decir, tal que $\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = 0$. Tal parámetro s recibe el nombre de *parámetro afín* y es único salvo multiplicación y adición de constantes que corresponden a la elección del origen del parámetro afín y a la elección de unidades. La parametrización $\gamma(s)$ de la curva geodésica γ donde s es un parámetro afín recibe el nombre de *geodésica*. Dado un sistema coordenado, las geodésicas satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}^\nu\nabla_\nu\dot{x}^\mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0,$$

donde el punto denota la derivada con respecto al parámetro afín: $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s$. Notemos que las geodésicas solo dependen de la parte simétrica de la conexión y, por esta razón, solo consideraremos conexiones afines simétricas.

Una *geodésica γ es completa* si y solo si su parámetro afín recorre toda la recta real. La variedad diferenciable $\mathscr{M}$ es *geodésicamente completa* si y solo si todas sus geodésicas son completas.

Definimos la *aplicación exponencial* en $p \in \mathscr{M}$ como la aplicación de clase C^∞ $\exp_p : T_p \to \mathscr{M}$ tal que a cada vector $\boldsymbol{v}$ en p le asigna el punto $\exp_p(\boldsymbol{v})$ de $\mathscr{M}$ que se halla a una distancia paramétrica afín unidad de p a lo largo de la geodésica que pasa por p y cuyo vector tangente es $\boldsymbol{v}$. Entonces, $\mathscr{M}$ es geodésicamente completa si y solo si la aplicación exponencial está definida para todos los vectores de T_p y para todos los puntos de $\mathscr{M}$.

1.2.2.2. Coordenadas normales

Dado un punto p, la aplicación exponencial define un difeomorfismo entre un abierto del vector nulo en T_p y un abierto $\mathscr{N}_p$ de p en $\mathscr{M}$ que recibe el nombre de *entorno normal*[3] de p. Escojamos $\mathscr{N}_p$ de forma que, dados dos puntos de $\mathscr{N}_p$, exista una única geodésica que los una y que esté contenida en $\mathscr{N}_p$, es decir, escojamos el entorno normal $\mathscr{N}_p$ *convexo*. Entonces podemos definir un sistema de coordenadas (una carta) en $\mathscr{N}_p$ eligiendo una base $\{\boldsymbol{e}_\mu|_p\}$ arbitraria[4] de T_p y asignando coordenadas x'^μ al punto $q \in \mathscr{N}_p$ obtenido mediante el mapa exponencial $q = \exp_p(x'^\mu \boldsymbol{e}_\mu|_p)$. En otras palabras, utilizamos como coordenadas del punto q las componentes del vector $\exp_p^{-1}(q)$ en la base $\{\boldsymbol{e}_\mu|_p\}$ y, por tanto, $\{\partial'_\mu\}$ es una base coordenada de campos vectoriales en $\mathscr{N}_p$. Notemos que $\partial'_\mu|_p = \boldsymbol{e}_\mu|_p$ aunque, en general, $\partial'_\mu \neq \boldsymbol{e}_\mu$. Las coordenadas así definidas reciben el nombre de *coordenadas normales centradas en el punto p*.

Notemos que, dados dos puntos de un entorno normal, existe un única geodésica que los une. Esta propiedad en general no es cierta globalmente: si los dos puntos no pertenecen a un entorno normal, pueden no existir geodésicas que los unan o pueden existir más de una.

Es fácil ver que las componentes de la parte simétrica de la conexión en una base de coordenadas normales centradas en p se anulan en este punto. En efecto, todas las geodésicas que pasan por p se convierten mediante cualquier carta ϕ de coordenadas normales en rectas de $\mathbb{R}^n$ que pasan por el origen. Por tanto, sus coordenadas satisfacen $\ddot{x}'^\mu = 0$, de lo que se deduce que $\Gamma'^\mu_{(\nu\rho)} = 0$. Desde otro punto de vista, en coordenadas normales, $\ddot{x}'^\mu = 0$ es la ecuación de las geodésicas. Un cambio de coordenadas arbitrario $x' \to x$ conduce a la ecuación geodésica $\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0$.

[3] La existencia de una conexión permite definir entornos normales, como acabamos de ver, y éstos a su vez garantizan la paracompacidad de $\mathscr{M}$ (ver, por ejemplo, referencia [3]).

[4] Hemos utilizado índices griegos para esta base a pesar de ser arbitraria; puesto que se trata de una base del espacio tangente en un punto p concreto, tal distinción no es relevante.

1.2.3. Tensores de Riemann y de Ricci

Sean f y ω_c una función escalar y una uno-forma y calculemos (EJERCICIO) la acción de la doble derivada covariante antisimetrizada sobre $f\omega_c$:

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(f\omega_c) = f(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c,$$

es decir, $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$ actúa linealmente sobre uno-formas. Además, aunque no sea obvio, $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c$ solo depende del valor de ω_c en p y no en sus alrededores (EJERCICIO, ver referencia [2]). Por tanto, $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$ es un tensor $R_{abc}{}^d$ de tipo $(1,3)$,

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d,$$

llamado *tensor de Riemann*.

A partir de la actuación de $\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$ sobre el escalar $v^a\omega_a$, es posible comprobar (EJERCICIO) que

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)v^d = -R_{abc}{}^d v^c.$$

Asimismo, es posible demostrar que el tensor de Riemann tiene las siguientes propiedades (EJERCICIO)

- Es antisimétrico en los dos primeros índices: $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$.
- Se anula si antisimetrizamos los tres primeros índices: $R_{[abc]}{}^d = 0$.
- Satisface la identidad de Bianchi: $\nabla_{[e}R_{ab]c}{}^d = 0$.

Las componentes del tensor de Riemann en una base coordenada se pueden escribir en términos de las componentes de la conexión en esa base (EJERCICIO):

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \partial_\nu\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} - \partial_\mu\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}.$$

El *tensor de Ricci* se define como la traza del tensor de Riemann: $R_{ac} = R_{abc}{}^b$.

1.2.4. Desviación geodésica

Consideremos una familia uniparamétrica de geodésicas $\gamma_s(t)$: para cada valor de s, γ_s es una curva geodésica parametrizada afínmente por t. Sea $\boldsymbol{t}$ el campo vectorial de vectores tangentes a la familia de geodésicas. Entonces $\boldsymbol{t}$ satisface la ecuación de las geodésicas, es decir, $t^a\nabla_a t^b = 0$. Consideremos, además, un *vector de desviación* $\boldsymbol{z} = \partial_s$ tangente a la curva parametrizada por s para cada t constante. $\boldsymbol{z}$ se puede interpretar como el vector que une dos puntos de dos

geodésicas vecinas. Notemos que $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{z}$ conmutan por ser vectores de una base coordenada y, por tanto, $t^a\nabla_a z^b = z^a\nabla_a t^b$.

El vector $v^a = t^b\nabla_b z^a$ nos da la velocidad de separación entre dos geodésicas cercanas y $a^a = t^b\nabla_b v^a$ su aceleración relativa, es decir, la aceleración con la que se acercan o separan. Es fácil ver (EJERCICIO) que el vector de desviación satisface la *ecuación de desviación geodésica*

$$a^a = t^c\nabla_c(t^b\nabla_b z^a) = -R_{cbd}{}^a z^b t^c t^d.$$

Esta ecuación nos dice que la condición necesaria y suficiente para que dos geodésicas inicialmente paralelas permanezcan paralelas (no se aceleren relativamente) es que el tensor de Riemann se anule. Diremos que una *conexión* es *plana* si y solo si su tensor de Riemann se anula en toda la variedad.

El tensor de Riemann también determina cuándo el transporte paralelo de un vector es independiente del camino elegido, en regiones suficientemente pequeñas. Equivalentemente, determina cuándo, al transportar paralelamente un vector $\boldsymbol{v}$ a lo largo de una curva cerrada γ suficientemente pequeña, el vector no cambia. Sean $x^\mu(t)$ tales que $x^\mu(0) = x^\mu(1)$ las coordenadas de la curva cerrada γ. Entonces se verifica (EJERCICIO) que

$$\Delta v^\mu = v^\mu(1) - v^\mu(0) = \frac{1}{2}R_{\sigma\rho\nu}{}^\mu|_{\gamma(0)}v^\nu(0)\int_0^1 x^{[\rho}\dot{x}^{\sigma]}dt.$$

EJERCICIO: Particularizar esta expresión al caso de superficies bidimensionales y analizar el resultado desde el punto de vista de la geometría diferencial clásica.

1.3. Variedades diferenciables pseudoriemannianas

1.3.1. Métrica

Una *métrica* $\boldsymbol{g}$ en una variedad diferenciable $\mathscr{M}$ es un campo tensorial simétrico C^∞ doblemente covariante (es decir, de tipo $(0,2)$). Sus componentes en una base arbitraria $\{\boldsymbol{e}_a\}$ son $g_{ab} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)$. En una base coordenada, el tensor métrico se puede escribir $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$. También utilizaremos la notación $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ para representar al tensor métrico, donde $\mathrm{d}s^2$ recibe el nombre de *elemento de línea*.

Definimos la *norma* del vector v^a como $\sqrt{|g_{ab}v^a v^b|}$ y, dados dos vectores de norma no nula v^a y w^a, definimos el *ángulo* α que forman mediante la expresión

$$\cos\alpha = \frac{g_{ab}v^a w^b}{\sqrt{|g_{cd}v^c v^d||g_{ef}w^e w^f|}}.$$

Dos vectores v^a y w^a son *ortogonales* si y solo si $g_{ab}v^a w^b = 0$. Nótese que la noción de ortogonalidad está definida incluso para vectores de norma nula.

Una métrica es *degenerada* en el punto p si y solo si existe algún vector de T_p perpendicular a todos los vectores de T_p si y solo si la matriz (g_{ab}) de las componentes de la métrica es singular en cualquier base. A partir de ahora, supondremos que la métrica no es degenerada. Entonces, existe un único tensor de tipo $(2,0)$ cuyas componentes en una base arbitraria son g^{ab} y tal que (g^{ab}) es la matriz inversa de la matriz (g_{ab}), es decir, tal que $g_{ab}g^{bc} = \delta_a{}^c$. Puesto que la métrica es no degenerada, la inversa tampoco lo es.

La introducción de una métrica supone la presencia de una estructura adicional en la variedad diferenciable que permite establecer un isomorfismo entre los espacios tangente T_p y cotangente T_p^*. Así, se establece también un isomorfismo entre cualquier espacio tensorial definido sobre $\mathscr{M}$ mediante el cual podemos "subir y bajar índices" con el tensor métrico y su inverso. Por ejemplo, dado un vector v^a, podemos asociar una única forma definida a partir de él mediante $v_a = g_{ab}v^b$ y viceversa. Similarmente, dado un tensor T_{ab} de tipo $(0,2)$, podemos asociar (haciendo uso de la métrica o de su inversa) un único tensor $T^a{}_b = g^{ac}T_{cb}$ de tipo $(1,1)$ y otro $T^{ab} = g^{ac}g^{bd}T_{cd}$ de tipo $(2,0)$, que consideraremos como distintas representaciones del mismo objeto. Así, g_{ab}, g^{ab} y $\delta^a{}_b$ pueden considerarse como distintas representaciones del tensor métrico $\boldsymbol{g}$.

Llamaremos *signatura* del tensor métrico al número de autovalores positivos menos el de negativos que posee y llamaremos *métrica lorentziana* a aquélla cuya signatura es $n-2$ y cuya estructura de autovalores es, por tanto, $(-,+\overset{n-1}{\cdots}+)$. Una métrica lorentziana en la variedad $\mathscr{M}$ separa el espacio tangente T_p en tres tipos de vectores e introduce así su *estructura causal*:

- *temporales*, tales que $v^a v_a = g_{ab}v^a v^b < 0$;
- *espaciales*, tales que $v^a v_a = g_{ab}v^a v^b > 0$;
- *nulos o de género luz*, tales que $v^a v_a = g_{ab}v^a v^b = 0$. Este conjunto de vectores define el *cono de luz o nulo* en el punto p.

En cada punto $p \in \mathscr{M}$, se puede llamar "futuro" a la mitad del cono de luz (figura 1.2). Si es posible hacer tal asignación de forma continua en todos los puntos de la variedad, entonces diremos que la variedad es *orientable temporalmente* y, si tal es el caso, entonces existe un campo vectorial t^a de clase C^∞ que no se anula en ningún punto y que es de género tiempo en toda la variedad (sin demostración; ver referencias [2, 3]).

Diremos que una *curva es de género luz, espacio o tiempo* dependiendo de si su vector tangente es de género luz, espacio o tiempo en todos los puntos de la misma.

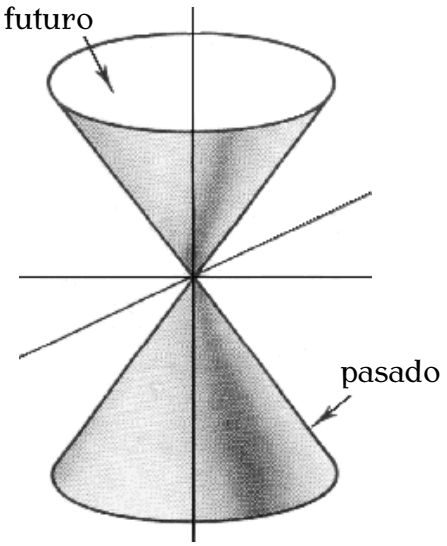


Figura 1.2: Cono de luz.

Puede demostrarse que toda variedad no compacta admite una métrica lorentziana. Sin embargo, es posible encontrar variedades compactas que no admiten una métrica lorentziana —una esfera, por ejemplo (ver referencia [3]).

1.3.2. Conexión de Levi-Civita

En una variedad diferenciable, pueden coexistir una conexión y una métrica sin relación alguna. Sin embargo, existe una única conexión sin torsión (simétrica), llamada *conexión de Levi-Civita*, compatible con la métrica, es decir, tal que la derivada covariante de la métrica se anula $\nabla \boldsymbol{g} = 0$ ó, en componentes, $\nabla_a g_{bc} = 0$. En efecto, esta condición implica que, en una base coordenada, las componentes de la conexión deben satisfacer

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho}.$$

De esta expresión, vemos que $\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} = 2\Gamma_{\rho\mu\nu}$ y, por tanto, que se satisfacen las *relaciones de Christoffel*

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Esta conexión es la única solución de la ecuación $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$.

EJERCICIO: Demostrar que la norma y ángulo entre dos vectores se preservan al transportarlos paralelamente con la conexión de Levi-Civita. Como consecuencia, las geodésicas tienen siempre un género bien definido.

EJERCICIO: Demostrar que $\mathfrak{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita.

Además de las simetrías ya descritas que posee el tensor de Riemann asociado a cualquier conexión afín, la compatibilidad con la métrica añade otra más (EJERCICIO): es antisimétrico en el segundo par de índices (covariantes),

$$R_{abcd} = -R_{abdc}.$$

En resumen, el tensor de Riemann de la conexión de Levi-Civita es antisimétrico en el primer par de índices; también es antisimétrico en el segundo par de índices; además, es simétrico bajo el intercambio del primer par por el segundo, lo que hace que el tensor de Ricci sea simétrico $R_{ab} = R_{ba}$.

Teniendo en cuenta estas simetrías, el tensor de Riemann tiene $n^2(n^2-1)/12$ componentes algebraicamente independientes y el tensor de Ricci $n(n+1)/2$ (para $n \geq 3$). En una dimensión, los tensores de Riemann y de Ricci se anulan; en dos y tres dimensiones, el tensor de Riemann está completamente determinado por el de Ricci; en cuatro dimensiones, la mitad de las componentes del tensor de Riemann están determinadas por el tensor de Ricci y la otra mitad no.

$\dim(\mathscr{M})$	n	4	3	2	1
Riemann	$n^2(n^2-1)/12$	20	6	1	0
Ricci	$n(n+1)/2$	10	6	1	0

Definimos el *escalar de curvatura* como la traza del tensor de Ricci:

$$R \equiv R^a{}_a = g^{ab} R_{ab}.$$

Definimos el *tensor de Weyl* como el tensor C_{abcd} que tiene las mismas simetrías que el de Riemann y que satisface la condición adicional de que no tiene traza, es decir, que $C^a{}_{bad} = 0$:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{2}{n-2}(g_{a[d}R_{c]b} + g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c}g_{d]b}.$$

Mediante una *transformación conforme* φ la métrica $\boldsymbol{g}$ se convierte, por definición, en $\boldsymbol{g}' = \varphi_* \boldsymbol{g} = \Omega^2 \boldsymbol{g}$, donde Ω es una función de clase C^∞. Las transformaciones conformes preservan los ángulos pero no los módulos de los vectores. Es fácil demostrar que dos métricas lorentzianas sobre la misma variedad tienen la misma estructura causal si y solo si están relacionadas mediante una transformación conforme (EJERCICIO).

El tensor de Weyl tiene la propiedad de ser invariante bajo transformaciones conformes, es decir, $\boldsymbol{C}' = \varphi_* \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$ (EJERCICIO). Por tanto, el tensor de Weyl determina la estructura causal de una variedad.

Finalmente, definimos el *tensor de Einstein*

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}.$$

Este tensor es simétrico y además, tiene divergencia nula $\nabla_a G^a{}_b = 0$, como se deduce de la identidad de Bianchi (EJERCICIO). Evidentemente, esta identidad de Bianchi reducida no contiene la misma información que la original en términos del tensor de Riemann completo. La parte que falta corresponde a la divergencia del tensor de Weyl (EJERCICIO):

$$\nabla_a C_{bcd}{}^a = \frac{2(n-3)}{n-2} \left\{ -\nabla_{[b} R_{c]d} + \frac{1}{2(n-1)} \nabla_{[b} R g_{c]d} \right\}.$$

1.3.3. Geodésicas como principio variacional

Dada una curva de género espacio parametrizada por t y cuyo vector tangente es $\dot{x}^a$, definimos su *longitud* entre dos puntos de coordenadas $x^\mu(0)$ y $x^\mu(1)$ como

$$l = \int_0^1 \mathrm{d}t |g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|^{1/2}.$$

Esta longitud es independiente de la parametrización como es inmediato comprobar. Si la curva es de género luz su longitud es nula. Si la curva es de género tiempo, utilizaremos el término *tiempo propio* τ en vez de longitud l.

Veamos ahora qué curvas hacen que la longitud (o el tiempo propio) entre dos puntos sea estacionaria. Para ello basta con calcular la variación de la longitud l bajo pequeñas deformaciones de la curva sin que se vean afectados los puntos extremos. El resultado es (EJERCICIO) que la curva para la que la longitud es estacionaria satisface la ecuación

$$\dot{x}^\nu \nabla_\nu \dot{x}^\mu = -\dot{x}^\mu |g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|^{1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|^{-1/2}.$$

Esta es la ecuación de una curva geodésica en términos de un parámetro no afín. Una reparametrización adecuada la convierte en una parametrización geodésica.

EJERCICIO: Demostrar que las geodésicas son curvas que hacen estacionaria la acción $S = \int \mathrm{d}t g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$.

En muchos casos, la forma más conveniente de calcular los símbolos de Christoffel en una base coordenada es encontrar la ecuación de la curva estacionaria de esta acción y compararla con la expresión de las curvas geodésicas en términos de los símbolos de Christoffel.

1.3.4. Hipersuperficies

1.3.4.1. Embebimientos

Una *hipersuperficie* $\theta(\mathscr{S})$ de $\mathscr{M}$ es una variedad $(n-1)$-dimensional $\mathscr{S}$ embebida en $\mathscr{M}$ mediante el embebimiento θ. Puesto que θ es un difeomorfismo sobre $\theta(\mathscr{S})$, dado un punto $p \in \mathscr{S}$, el *push-forward* θ_* establece un isomorfismo entre el espacio tangente T_p y el subespacio $(n-1)$-dimensional $H_{\theta(p)} \equiv \theta_*(T_p) \subset T_{\theta(p)}$. Por lo tanto, existe una uno-forma $\boldsymbol{n}$ en el espacio cotangente $T^*_{\theta(p)}$ que aniquila a todos los vectores $\theta_*\boldsymbol{v} \in H_{\theta(p)}$, es decir, tal que $\langle \boldsymbol{n}, \theta_*\boldsymbol{v}\rangle = 0$, donde $\boldsymbol{v} \in T_p$. Esta uno-forma $\boldsymbol{n}$, llamada *normal* a la hipersuperficie, es única salvo signo y normalización. Ya vimos que si la hipersuperficie está definida por el núcleo de alguna función f, entonces $\boldsymbol{n} = \mathrm{d}f$.

La aplicación *pull-back* θ^* no está definida en todo el espacio tangente $T_{\theta(p)}$, pero sí en la imagen del *push-forward* θ_*; de hecho, $\theta^* : H_{\theta(p)} \to T_p$ es su isomorfismo inverso, $\theta^* \equiv \theta_*^{-1}$. Si suponemos que la normal no es de género nulo y definimos $\nu = n^a n_a = \pm 1$, entonces podemos extender la actuación de θ^* a cualquier vector de $T_{\theta(p)}$ mediante la proyección previa sobre el subespacio $H_{\theta(p)}$. Dicha proyección se lleva a cabo mediante la aplicación lineal $\boldsymbol{h} : T_{\theta(p)} \to H_{\theta(p)}$ tal que, dado cualquier vector $\boldsymbol{w} \in T_{\theta(p)}$,

$$h^a{}_b w^b = w^a - \nu(n_c w^c) n^a.$$

De forma análoga, podemos extender la actuación de θ^* a cualquier tensor contravariante. Utilizaremos el mismo símbolo θ^* para denotar tanto al *pull-back* en sentido estricto como a su extensión.

Dada una uno-forma $\boldsymbol{\omega} \in T^*_{\theta(p)}$, su *pull-back* es una uno-forma $\theta^*\boldsymbol{\omega} \in T^*_p$ bien definida. El *push-forward* de una uno-forma $\boldsymbol{\alpha} \in T^*_p$ no está definido de manera unívoca sobre $T^*_{\theta(p)}$. En efecto, a la uno forma $\mathbf{0} \in T^*_p$ le corresponden todas las uno-formas proporcionales a $\boldsymbol{n} \in T_{\theta(p)}$, ya que éstas aniquilan a todos los vectores $\theta_*\boldsymbol{v}$. Sin embargo, puesto que θ es un difeomorfismo en su imagen $\theta(\mathscr{S})$, la aplicación *push-forward* $\theta_* : T^*_p \to H^*_{\theta(p)}$ sí esta bien definida, donde $H^*_{\theta(p)}$ es el espacio dual de $H_{\theta(p)}$. Obviamente, $H^*_{\theta(p)}$ es el subespacio de uno-formas $\boldsymbol{\omega}$ tales que $\omega_a n^a = 0$. Si la normal no es de género nulo, entonces podemos extender la actuación de θ_* a cualquier uno-forma de T^*_p mediante la proyección posterior sobre el subespacio $H^*_{\theta(p)}$. Dicha proyección se lleva a cabo mediante la aplicación lineal $\boldsymbol{h} : T^*_{\theta(p)} \to H^*_{\theta(p)}$ tal que, dada cualquier uno-forma $\boldsymbol{\omega} \in T^*_{\theta(p)}$,

$$h^a{}_b \omega_a = \omega_b - \nu(n^c \omega_c) n_b.$$

De forma análoga, podemos extender la actuación de θ_* a cualquier tensor covariante. Utilizaremos el mismo símbolo θ_* para denotar tanto al *push-forward* en sentido estricto como a su extensión.

Como resumen, hemos extendido la actuación de las aplicaciones *pull-back* y *push-forward* a cualquier tensor de la variedad $\mathscr{M}$ definido en cualquier punto de la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$, es decir, a cualquier tensor de $T^r_s(\theta(p))$, mediante la proyección sobre el correspondiente espacio tensorial $H^r_s(\theta(p))$ de la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$.

Si tanto $\mathscr{S}$ como $\mathscr{M}$ son variedades orientables, entonces es posible encontrar un campo C^∞ de uno-formas $\boldsymbol{n}$ normales a $\theta(\mathscr{S})$ que no se anula en ningún punto. En este caso, la dirección de $\boldsymbol{n}$ determina la orientación relativa de $\theta(\mathscr{S})$ y $\mathscr{M}$ de la siguiente manera. Escojamos un atlas de $\mathscr{M}$ tal que la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$ satisfaga la ecuación $x^1 = 0$, de forma que $\boldsymbol{n} = \mathrm{d}x^1$; entonces, $(x^2 \cdots x^n)$ son coordenadas locales orientadas de la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$.

1.3.4.2. Primera forma fundamental

Dada una métrica $\boldsymbol{g}$ en $\mathscr{M}$, el embebimiento θ induce una métrica $\theta^*\boldsymbol{g}$ en $\mathscr{S}$ mediante el *pull-back* θ^*. La métrica inducida $\theta^*\boldsymbol{g}$ recibe el nombre de *primera forma fundamental* de $\mathscr{S}$. Esta métrica será (EJERCICIO)

- riemanniana si $\boldsymbol{n}$ es de género tiempo; entonces diremos que la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$ es de género espacio.
- lorentziana si $\boldsymbol{n}$ es de género espacio; entonces diremos que la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$ es de género tiempo.
- degenerada si $\boldsymbol{n}$ es de género luz; entonces diremos que la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$ nula.

Dado un tensor $\boldsymbol{T}$ cualquiera en $\mathscr{S}$, (la extensión de) el *push-forward* θ_* produce tensores en $\mathscr{M}$, que tienen la propiedad de que cualquier contracción con la normal se anula, como hemos visto. En particular, podemos introducir el tensor simétrico $\boldsymbol{h} = \theta_*(\theta^*\boldsymbol{g})$ cuya proyección sobre la normal se anula. Podemos escribir $\boldsymbol{h}$ en términos de la métrica $\boldsymbol{g}$ y de la normal $\boldsymbol{n}$ de la siguiente forma:

$$h_{ab} = g_{ab} - \nu n_a n_b,$$

donde $n^a n_a = \nu = \pm 1$ dependiendo de si la hipersuperficie es espacial o temporal. Obviamente, $h_{ab}n^c = 0$ y $\theta^*\boldsymbol{h} = \theta^*\boldsymbol{g}$, que es la primera forma fundamental de $\mathscr{S}$. El tensor $\boldsymbol{h}$ es precisamente el proyector sobre la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$ puesto que permite descomponer cualquier vector de $\mathscr{M}$ en un vector tangente a la hipersuperficie y otro normal a la misma y análogamente para las uno-formas y tensores en general. Así, la primera forma fundamental permite identificar los tensores de $\mathscr{S}$ con sus imágenes en la hipersuperficie $\theta(\mathscr{S})$. En particular, podemos considerar $\boldsymbol{h}$ como la métrica inducida en la hipersuperficie.

Esta métrica inducida $\boldsymbol{h}$ define una conexión D compatible con ella que resulta ser la proyección de la derivada covariante en $\mathscr{M}$, es decir, en términos de la derivada covariante ∇ en $\mathscr{M}$ y de la métrica inducida, tiene la forma

$$\mathrm{D}_a T^{b_1\cdots b_r}{}_{c_1\cdots c_s} \equiv T^{b_1\cdots b_r}{}_{c_1\cdots c_s\|a} = h^{a'}{}_a h^{b_1}{}_{b'_1}\cdots h^{b_r}{}_{b'_r} h^{c'_1}{}_{c_1}\cdots h^{c'_s}{}_{c_s}\nabla_{a'} T^{b'_1\cdots b'_r}{}_{c'_1\cdots c'_s},$$

donde hemos extendido el tensor $\boldsymbol{T}$ definido sobre $\theta(\mathscr{S})$ a toda la variedad $\mathscr{M}$. Notemos que esta derivada covariante es independiente de la extensión que utilicemos para el tensor $\boldsymbol{T}$ puesto que $\boldsymbol{h}$ proyecta la derivada covariante sobre $\theta(\mathscr{S})$.

EJERCICIO: Demostrar que D es la derivada covariante compatible con $\boldsymbol{h}$. Es decir, demostrar que es una derivada covariante y que $\mathrm{D}\boldsymbol{h} = 0$.

1.3.4.3. Segunda forma fundamental

Definimos la *segunda forma fundamental* o *curvatura extrínseca* de la hipersuperficie como el tensor $\boldsymbol{K}$ definido como la proyección de la derivada covariante de la normal:

$$K_{ab} = h^c{}_a h^d{}_b \nabla_d n_c.$$

EJERCICIO: Demostrar las ecuaciones de Gauss y de Gauss-Codazzi, que relacionan el tensor de Riemann ${}^h\boldsymbol{R}$ de la métrica inducida $\boldsymbol{h}$, la segunda forma fundamental $\boldsymbol{K}$ y el tensor de Riemann $\boldsymbol{R}$ de la métrica $\boldsymbol{g}$:

$$\begin{aligned} {}^hR_{abc}{}^d &= h^e{}_a h^f{}_b h^g{}_c h^d{}_h R_{efg}{}^h + \nu K_{ac}K_b{}^d - \nu K_{bc}K_a{}^d, && \text{(Gauss)}\\ \mathrm{D}_a K^a{}_b - \mathrm{D}_b K &= R_{cd}n^c h^d{}_b, && \text{(Gauss-Codazzi)} \end{aligned}$$

donde $K = K^a{}_a$ es la traza de la curvatura extrínseca.

1.3.5. Isometrías

1.3.5.1. Isometrías propias

Un difeomorfismo $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ es una *isometría* si y solo si preserva el tensor métrico en toda la variedad $\mathscr{M}$, es decir, si y solo si $\varphi^*\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}$. El grupo uniparamétrico de difeomorfismos φ_t generado por el campo vectorial $\boldsymbol{\xi}$ es un grupo de isometrías si y solo si satisface la ecuación de Killing

$$\pounds_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0.$$

Entonces $\boldsymbol{\xi}$ recibe el nombre de *campo vectorial de Killing*.

Sea v^a el vector tangente de una geodésica y sea ξ^a un vector de Killing. Entonces, $\xi_a v^a$ es constante a lo largo de la geodésica. En efecto,

$$v^b \nabla_b (\xi_a v^a) = v^a v^b \nabla_b \xi_a + \xi_a v^b \nabla_b v^a = 0.$$

Una variedad diferenciable tiene como máximo $n(n+1)/2$ vectores de Killing. Para demostrarlo, basta con tener en cuenta la siguiente propiedad exclusiva de los vectores de Killing (EJERCICIO):

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c = R_{cba}{}^d \xi_d.$$

Conocidas las n componentes del vector de Killing ξ_a y las $n(n-1)/2$ componentes de su derivada covariante $\nabla_a \xi_b$ (por ser vector de Killing es antisimétrica) en un punto, podemos conocer el vector de Killing en toda la variedad mediante integración de estas ecuaciones. El número total de isometrías es precisamente la dimensión del espacio de condiciones iniciales que es $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

1.3.5.2. Variedades estacionarias y estáticas

Una variedad lorentziana es *estacionaria* si y solo si existe un vector de Killing $\boldsymbol{\xi} = \partial_t$ de género tiempo. Entonces, la métrica estacionaria más general en una base coordenada adaptada a este Killing $\{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}_i\}$ es de la forma $g_{\mu\nu}(x^i)$ (EJERCICIO).

Una variedad lorentziana estacionaria es *estática* si y solo si existe una hipersuperficie espacial ortogonal al vector de Killing $\boldsymbol{\xi}$, lo que es equivalente (teorema de Frobenius; ver ejercicio 1.6) a la condición

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0.$$

En cualquier sistema de coordenadas tal que el parámetro t sea una de ellas, la métrica de un espaciotiempo estático es invariante bajo inversión temporal y la métrica es tal que $g_{0i} = 0$ (EJERCICIO).

1.3.5.3. Isometrías conformes

Un difeomorfismo $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ es una *isometría conforme* si y solo si existe una función Ω tal que $\varphi_* \boldsymbol{g} = \Omega^2 \boldsymbol{g}$. El grupo uniparamétrico de difeomorfismos φ_t generado por el campo vectorial $\boldsymbol{\xi}$ es un grupo de isometrías conformes si y solo si $\pounds_\xi g_{ab} \propto g_{ab}$. Entonces $\boldsymbol{\xi}$ recibe el nombre de *campo vectorial de Killing conforme*.

El vector $\boldsymbol{\xi}$ es un vector de Killing conforme si y solo si satisface la ecuación

de Killing conforme (EJERCICIO)

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = \frac{2}{n}(\nabla_c \xi^c) g_{ab}.$$

Sea v^a el vector tangente de una geodésica y sea ξ^a un vector de Killing conforme. Entonces, (EJERCICIO)

$$v^b \nabla_b (\xi_a v^a) = \frac{1}{n}(\nabla_c \xi^c) v_a v^a.$$

1.4. Formas diferenciales

1.4.1. Formas

Una *p-forma* es un tensor covariante antisimétrico. Nótese que $p \leq n$ puesto que, de otra manera, la antisimetrización lo anula automáticamente. Consideremos el conjunto formado por todos los productos tensoriales completamente antisimétricos de p uno-formas de una base del espacio cotangente

$$e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p} = e^{[a_1} \otimes \cdots \otimes e^{a_p]}.$$

Aunque este conjunto genera, mediante combinaciones lineales, todo el espacio de p-formas, sus elementos no son linealmente independientes. Sin embargo, el conjunto ordenado $\{e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p},\ a_1 < \cdots < a_p\}$ es una base de dicho espacio. Así, cualquier p-forma $\boldsymbol{\omega}$ se puede escribir de la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{a_1 \cdots a_p} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p}, \qquad (a_1 < \cdots < a_p),$$

o, si eliminamos la condición de ordenación,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{p!} \omega_{a_1 \cdots a_p} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p}.$$

Si $\boldsymbol{\omega}$ es una p-forma y $\boldsymbol{\sigma}$ es una q-forma de componentes $\omega_{a_1 \cdots a_p}$ y $\sigma_{b_1 \cdots b_q}$ respectivamente, definimos su *producto exterior* como la $(p+q)$-forma $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}$ cuyas componentes son

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma})_{a_1 \cdots a_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[a_1 \cdots a_p} \sigma_{a_{p+1} \cdots a_{p+q}]}.$$

El producto exterior satisface la propiedad $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma} = (-1)^{pq} \boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{\omega}$ y es, obviamente, bilineal. El espacio de todas las p-formas $(p = 0 \cdots n)$ con esta operación forma un *álgebra de Grassmann*.

1.4.2. Derivación

Dadas dos conexiones diferentes ∇ y $\tilde{\nabla}$, su actuación sobre una p-forma $\boldsymbol{\omega}$ es tal que (EJERCICIO)

$$\nabla_{[a}\omega_{b_1\cdots b_p]} - \tilde{\nabla}_{[a}\omega_{b_1\cdots b_p]} = \sum_{k=1}^{p} C^{c}{}_{[ab_k}\omega_{a_1\cdots|c|\cdots a_p]},$$

donde $[\cdots|c|\cdots]$ indica antisimetrización en todos los índices excepto c. Puesto que $C^{c}{}_{ab}$ es un tensor simétrico en sus índices covariantes, esta expresión se anula. Todas las derivadas covariantes (en particular, la derivada covariante ordinaria $\tilde{\partial}$) actuando sobre una p-forma $\boldsymbol{\omega}$ dan la misma $(p+1)$-forma que denotaremos por $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ y que denominaremos *derivada exterior*. Las componentes de $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ son

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})_{ab_1\cdots b_p} = (p+1)\nabla_{[a}\omega_{b_1\cdots b_p]}.$$

Es fácil demostrar el lema de Poincaré (EJERCICIO): dada una forma $\boldsymbol{\omega}$, la diferencial de su diferencial se anula:

$$\mathrm{dd}\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Una forma es *exacta* si es la diferencial de alguna forma. Una forma es *cerrada* si su diferencial se anula. Así, el lema de Poincaré nos dice que toda forma exacta es cerrada. El enunciado inverso, que toda forma cerrada es exacta, es decir, que si $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0$ entonces existe una forma $\boldsymbol{\sigma}$ tal que $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$, es cierto localmente.

Dada una p-forma $\boldsymbol{\omega}$ y otra q-forma $\boldsymbol{\sigma}$, la derivada exterior satisface la propiedad (EJERCICIO)

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\sigma} + (-1)^p\boldsymbol{\omega}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

Sean $\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}$ las componentes en una base coordenada de una p-forma $\boldsymbol{\omega}$. Entonces,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{p!}\mathrm{d}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}.$$

La derivada exterior conmuta con los difeomorfismos ya que lo hace sobre funciones. Si $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ es un difeomorfismo y $\boldsymbol{\omega}$ es una forma en $\mathscr{N}$, entonces $\mathrm{d}(\varphi^*\boldsymbol{\omega}) = \varphi^*(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})$. Esta expresión es equivalente a la regla de la cadena (EJERCICIO).

1.4.3. Integración

1.4.3.1. Teorema de Stokes

Toda variedad paracompacta admite un atlas localmente finito[5] $\{(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y una *partición de la unidad* (sin demostración), es decir, un conjunto de funciones $\{f_\alpha\}$ de clase C^∞ tales que

- $0 \leq f_\alpha \leq 1$.
- el soporte de f_α está contenido en $\mathscr{U}_\alpha$.
- $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ para todo $p \in \mathscr{M}$.

Definimos *integral* de una n-forma en toda la variedad como

$$\int_{\mathscr{M}} \boldsymbol{\omega} = \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha)} f_\alpha \omega_{1\ldots n} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n,$$

donde $\{(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha), f_\alpha\}$ es una partición de la unidad y $\omega_{1\ldots n}$ está definido en la base coordenada $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ asociada a la carta $(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)$, es decir, $\boldsymbol{\omega} = \omega_{1\ldots n} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$.

EJERCICIO: Demostrar que la integral de una n-forma es independiente del atlas y de la partición de la unidad elegida.

EJERCICIO: Demostrar que la integral de una n-forma es invariante bajo difeomorfismos, es decir, que $\int_{\varphi(\mathscr{M})} \boldsymbol{\omega} = \int_{\mathscr{M}} \varphi^* \boldsymbol{\omega}$.

Todas las n-formas en un punto de una variedad n-dimensional son proporcionales (EJERCICIO). La variedad es orientable si y solo si es posible encontrar una n-forma $\boldsymbol{\omega}$ continua en toda la variedad y que no se anule. Dos formas $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega}'$ definen la misma orientación si y solo si $\boldsymbol{\omega}' = |f|\boldsymbol{\omega}$ para alguna función f. Una variedad orientable tiene dos posibles orientaciones: la definida por $|f|\boldsymbol{\omega}$ y la definida por $-|f|\boldsymbol{\omega}$.

Teorema (Stokes): dada una $(n-1)$-forma $\boldsymbol{\omega}$ en $\mathscr{M}$,

$$\int_{\partial\mathscr{M}} \theta^* \boldsymbol{\omega} = \int_{\mathscr{M}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega},$$

donde θ^* es el pull-back inducido por el embebimiento de la frontera $\partial\mathscr{M}$ de la variedad en la propia variedad $\mathscr{M}$.

EJERCICIO: Demostrar el teorema de Stokes. Determinar además la orientación de la frontera (ver referencias [2, 3]) para que se verifique este teorema.

[5] Diremos que un atlas es *localmente finito* si y solo si cada $p \in \mathscr{M}$ tiene un abierto que tiene intersección no vacía solo con un número finito de cartas.

Hasta ahora solo hemos necesitado la estructura de variedad diferenciable. Sin embargo, para poder integrar funciones en la variedad necesitamos la estructura métrica, que permite introducir un elemento de volumen en la variedad.

1.4.3.2. Elementos de volumen

Definimos la *forma canónica asociada a la métrica* $\boldsymbol{g}$, también llamada *tensor de Levi-Civita*, como la n-forma

$$\boldsymbol{\epsilon} = |g|^{1/2}\boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n,$$

en una base cualquiera, donde g es el determinante de la matriz de las componentes del tensor métrico en esa base $g \equiv \det(g_{ab})$. Esta definición es independiente de la base elegida (EJERCICIO) gracias a la presencia del factor $|g|^{1/2}$. Las componentes covariantes de este tensor son

$$\epsilon_{a_1\cdots a_n} = n!|g|^{1/2}\delta^1_{[a_1}\cdots\delta^n_{a_n]}, \qquad \epsilon_{1\cdots n} = |g|^{1/2}.$$

EJERCICIO: Demostrar que la derivada covariante de $\boldsymbol{\epsilon}$ se anula.

EJERCICIO: Demostrar que las componentes contravariantes de $\boldsymbol{\epsilon}$ son

$$\epsilon^{a_1\cdots a_n} = (-1)^{\bar{s}}n!|g|^{-1/2}\delta^{[a_1}_{\ 1}\cdots\delta^{a_n]}_{\ n},$$

donde $\bar{s} = (n-s)/2$ y s es la signatura de la métrica (para métricas lorentzianas, $\bar{s} = 1$).

EJERCICIO: Demostrar que $\epsilon^{a_1\cdots a_n}\epsilon_{b_1\cdots b_n} = (-1)^{\bar{s}}n!\delta^{a_1}_{\ [b_1}\cdots\delta^{a_n}_{\ b_n]}$.

La forma canónica $\boldsymbol{\epsilon}$ determina el *elemento natural de volumen* $\mathrm{d}v = \boldsymbol{\epsilon}$ en la variedad. Dada una subvariedad n-dimensional $\mathscr{V}$ de $\mathscr{M}$, definimos su *volumen* como $\int_{\mathscr{V}} \mathrm{d}v \equiv \int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{\epsilon}$. Análogamente, dada una función f en $\mathscr{M}$, definimos su integral sobre la región $\mathscr{V}$ como la integral de la n-forma $f\boldsymbol{\epsilon}$, es decir,

$$\int_{\mathscr{V}} f\mathrm{d}v = \int_{\mathscr{V}} f\boldsymbol{\epsilon} = \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{V})} f_\alpha f|g|^{1/2}\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

que es, obviamente, independiente de las coordenadas elegidas (EJERCICIO).

Dada una base arbitraria, resulta conveniente definir la forma densitizada

$$\mathrm{d}^n x \equiv |g|^{-1/2}\mathrm{d}v = \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (\mathrm{d}^n x)_{a_1\cdots a_n} = \varepsilon_{a_1\cdots a_n} = n!\delta^0_{[a_1}\cdots\delta^n_{\ a_n]},$$

donde $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ es el símbolo antisimétrico de Levi-Civita tal que $\varepsilon_{12\cdots n} = 1$ y g es el determinante de la métrica en la base elegida. En términos de esta forma

de volumen densitizada, la integral de una densidad escalar $\mathscr{F} = f|g|^{1/2}$ tiene la misma expresión en $\mathbb{R}^n$ que en $\mathscr{V}$, cuando se elige una base coordenada:

$$\int_{\mathscr{V}} \mathscr{F} \mathrm{d}^n x = \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha \bigcap \mathscr{V})} f_\alpha \mathscr{F} \mathrm{d}^n x.$$

Dada una hipersuperficie cuya métrica inducida es $\boldsymbol{h}$, su forma canónica $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ es, salvo el signo ν, la contracción (en el primer índice) de la normal $\boldsymbol{n}$ con $\boldsymbol{\epsilon}$ (EJERCICIO):

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \nu \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\epsilon}, \qquad \bar{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = \nu n^b \epsilon_{b a_1 \cdots a_{n-1}},$$

donde $\nu = n^a n_a = \pm 1$ depende del género temporal ($-$) o espacial ($+$) de la normal a la hipersuperficie. De esta expresión, es fácil ver que (EJERCICIO)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{n} \wedge \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \qquad \epsilon_{a_1\cdots a_n} = n n_{[a_1} \bar{\epsilon}_{a_2 \cdots a_n]}.$$

Llamaremos $\mathrm{d}\sigma = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ al elemento natural de volumen en la hipersuperficie y $n_a \mathrm{d}\sigma$ al elemento de volumen orientado.

Notemos que el elemento de volumen espaciotemporal $\mathrm{d}v$ y el correspondiente volumen $\mathrm{d}\sigma$ de la hipersuperficie, están relacionados por las fórmulas

$$\boldsymbol{n}.\mathrm{d}v = \nu \mathrm{d}\sigma, \qquad n^b (\mathrm{d}v)_{b a_1 \cdots a_{n-1}} = \nu (\mathrm{d}\sigma)_{a_1 \cdots a_{n-1}}.$$

1.4.3.3. Teorema de Gauss

Sea $\mathscr{V}$ una variedad n-dimensional cuyo elemento de volumen es $\boldsymbol{\epsilon}$ y sean $\boldsymbol{n}$ y $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ la normal y el elemento de volumen de su frontera $(n-1)$-dimensional $\partial\mathscr{V}$. Para que la orientación relativa sea la adecuada (de acuerdo con el teorema de Stokes), debemos exigir que $\bar{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$ sea positivo si $a_1 < \cdots < a_{n-1}$.

Si la variedad es lorentziana y elegimos una base coordenada $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}$ en la que $\boldsymbol{e}_0$ es de género tiempo y tal que la única componente no nula de la normal sea n_0 si la hipersuperficie es espacial ($\nu = -1$), esta condición implica que se debe satisfacer que νn^0 sea positivo, es decir, que n^0 sea negativo; por tanto, el vector normal n^a debe apuntar hacia el interior. Análogamente, escogiendo una base coordenada tal que la única componente no nula de la normal sea n_1 si la hipersuperficie es temporal ($\nu = +1$), se debe satisfacer que νn^1 sea positivo, es decir, que n^1 sea positivo; por tanto, el vector normal n^a debe apuntar hacia el exterior.

Dado un vector $\boldsymbol{w}$ cualquiera, $\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon}$ es una $(n-1)$-forma que actúa, en general, sobre vectores tangentes a la variedad $\mathscr{V}$. Sus componentes son

$$(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon})_{a_1\cdots a_{n-1}} = w^b \epsilon_{b a_1 \cdots a_{n-1}} = n w^b n_{[b} \bar{\epsilon}_{a_1 \cdots a_{n-1}]} \tag{1.1}$$

y su derivada exterior es (EJERCICIO) $\mathrm{d}(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon}) = (\nabla_a w^a)\boldsymbol{\epsilon}$.

El teorema de Stokes aplicado a la forma $\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon}$ implica que

$$\int_{\mathscr{V}} (\nabla_a w^a)\mathrm{d}v = \int_{\mathscr{V}} \mathrm{d}(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon}) = \int_{\partial\mathscr{V}} \theta^*(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon}).$$

En el último miembro de esta ecuación, $\theta^*(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon})$ es una forma definida sobre la frontera $(n-1)$-dimensional $\partial\mathscr{V}$ y, por tanto, actúa solo sobre vectores tangentes a esta subvariedad (que son perpendiculares a $\boldsymbol{n}$). Así, las componentes de esta forma sobre $\partial\mathscr{V}$ son $\theta^*(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon})_{a_1\cdots a_{n-1}} = w^b n_b \bar{\epsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$, como se deduce de la ecuación 1.1, es decir, $\theta^*(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{\epsilon}) = n_b w^b \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$. Por tanto, el teorema de Stokes aplicado a esta $(n-1)$-forma se convierte en el **teorema** de Gauss:

$$\int_{\mathscr{V}} (\nabla_a w^a)\mathrm{d}v = \int_{\partial\mathscr{V}} w^a n_a \mathrm{d}\sigma.$$

1.5. Interludio: principios de covariancia

Las cantidades físicas relevantes deben producir números que se puedan medir al utilizar coordenadas concretas. Una forma de implementar este requisito es utilizar tensores que, al actuar sobre los vectores y las formas de una base coordenada, dan números contrastables con los experimentos. Las leyes de la física tienen, a menudo, carácter tensorial, aunque no necesariamente.

El *principio de covariancia general* rige las leyes de la física: las únicas cantidades que se refieren a la descripción del espaciotiempo (con lo que esto signifique) que pueden aparecer en las leyes de la física son aquellas que definen y determinan su estructura. En particular, no deben aparecer campos o bases vectoriales privilegiadas universales, que se refieran solo a la estructura espaciotemporal. Debe notarse que la invariancia o no de las ecuaciones bajo cambios de coordenadas no desempeña en este principio ningún papel explícito, aunque está íntimamente relacionado.

Supongamos que cierta ley física que determina cierta cantidad vectorial $\boldsymbol{V}$ se puede escribir en una cierta base coordenada $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ de la forma $V^\mu = z^\mu$ donde $z^\mu = (1,0,0,0)$ es una cantidad fija. Separando sus componentes, esta ley se puede escribir $V^0 = 1, \quad V^i = 0$. En el análisis de la aplicación del principio de covariancia general a este ejemplo, se pueden adoptar dos puntos de vista. Por un lado, z^μ no es un vector porque no se transforma adecuadamente bajo un cambio de base $z'^{\mu'} = e^{\mu'}{}_{\mu} z^\mu \neq (1,0,0,0)$ y, en consecuencia, esta ley tampoco se transforma adecuadamente, es decir, no es covariante:

$$V'^0 = \mathrm{e}^0{}_\mu V^\mu = \mathrm{e}^0{}_0 \neq 1, \qquad V'^{i'} = \mathrm{e}^{i'}{}_\mu V^\mu = \mathrm{e}^{i'}{}_0 V^0 \neq 0.$$

Sin embargo, siempre podemos definir el vector $\boldsymbol{z} = z^\mu \boldsymbol{e}_\mu$, en términos del cual la ley en cuestión adquiere la forma tensorial $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{z}$ ó, en una base arbitraria, $V^a = z^a$. Esta ecuación no es covariante, pero la razón no es que no se transforme adecuadamente bajo cambios de base, puesto que sí lo hace por definición. Más bien, el problema es que el vector $\boldsymbol{z}$ es un objeto tensorial completamente ajeno a las cantidades físicas que introduce una dirección privilegiada en el espaciotiempo.

El ejemplo quizá más relevante en esta asignatura es el de los símbolos de Christoffel. Estos símbolos no pueden aparecer, si no están derivados, en las leyes de la física por no tener carácter tensorial. Tampoco pueden hacerlo los tensores $\boldsymbol{C}$ que caracterizan una conexión ∇ en términos de una derivada covariante ordinaria $\tilde{\partial}$, a pesar de ser tensores. La razón, desde el punto de vista aquí adoptado, es que elegir uno de estos tensores $\boldsymbol{C}$ supone elegir una base coordenada privilegiada en términos de la cual se define la derivada covariante ordinaria $\tilde{\partial}$. En otras palabras, en la ley física que contiene $\boldsymbol{C}$ podemos sustituir éste por $\boldsymbol{C} = \nabla - \tilde{\partial}$. La derivada covariante ∇ determina el transporte paralelo y forma parte de los ingredientes que definen la estructura espaciotemporal. Sin embargo, $\tilde{\partial}$ establece una base privilegiada de forma enteramente análoga a como lo hace el vector $\boldsymbol{z}$ en el ejemplo anterior, aunque la ley física que se esté estudiando sí está descrita de forma covariante. Desde el punto de vista de cambios de coordenadas, la ley que contiene $\boldsymbol{C}$ adquiere una forma específica en la base coordenada privilegiada. Un cambio de base coordenada redefine este tensor de forma no tensorial y, por tanto, esta ley no se transforma tensorialmente bajo cambios generales de coordenadas. Ambos puntos de vista son duales y es importante no mezclarlos. De hecho, la situación es análoga a la distinción entre transformación activa y pasiva.

El *principio de covariancia especial* se refiere a las simetrías que nuestra estructura espaciotemporal posea: dados dos observadores S y S' relacionados mediante la acción de una simetría, los resultados físicamente posibles de medidas realizadas por uno también son resultados físicamente posibles de mediadas realizadas por el otro. Este principio implica que las simetrías actúan de igual manera sobre los campos físicos y sobre los observadores. Más explícitamente, supongamos que φ es una simetría. Cada observador (S y S') lleva asociada una base del espacio tangente ($\{\boldsymbol{e}_a\}$ y $\{\boldsymbol{e}'_a\}$) y ambas están relacionadas mediante la simetría φ: si $S = \varphi S'$, entonces $\boldsymbol{e}' = \varphi_* \boldsymbol{e}$. El principio de covariancia especial exige que si $\boldsymbol{T}$ es un campo físico (no necesariamente tensorial), las medidas que realice S de $\boldsymbol{T}$ darán los mismos resultados que las que realice S' de $\varphi_* \boldsymbol{T}$.

Si las leyes de la física son tensoriales, es decir, si $\boldsymbol{T}$ es un tensor, entonces vimos que $\varphi_* \boldsymbol{T}(\varphi_* \boldsymbol{e} \cdots) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e} \cdots)$ y, por tanto, el principio de covariancia especial queda automáticamente implementado por el de covariancia general. Si los campos físicos no están descritos mediante tensores o si el principio de cova-

riancia general no tiene aplicación, todavía es posible imponer el principio de covariancia especial haciendo uso de las simetrías. La covariancia general es especialmente útil cuando no existen simetrías que guíen la formulación de leyes físicas.

La covariancia especial se puede imponer, de forma análoga a lo que ocurre con el principio de covariancia general, en términos de cambios de coordenadas. Para ello, dada una ley tensorial, escribimos sus componentes en un sistema de coordenadas en términos de las componentes de todos los tensores que aparecen en ella, incluido el tensor métrico. Un cambio de coordenadas que corresponde a una isometría no afecta a las componentes de la métrica y, por tanto, teniendo en cuenta las leyes de transformación de los tensores, vemos que la forma de las ecuaciones no cambia. Es decir, la covariancia especial se puede expresar en términos de la invariancia de las ecuaciones para las componentes que representan las leyes de la física bajo un grupo "especial" de cambios de coordenadas, mientras que la covariancia general corresponde a la invariancia bajo cambios generales de coordenadas.

1.6. Ejercicios

1.1 Sea $\mathscr{M}$ una variedad n-dimensional y sea $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ el símbolo de Levi-Civita (es completamente antisimétrico y $\varepsilon_{12\cdots n} = 1$). Demostrar que el símbolo de Levi-Civita no es un tensor. Demostrar que el tensor de Levi-Civita $\epsilon_{a_1\cdots a_n} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ sí lo es. Encontrar la expresión de $\epsilon^{a_1\cdots a_n}$. Demostrar que todo tensor antisimétrico de tipo $(0, n)$ en una variedad n-dimensional es proporcional al tensor de Levi-Civita $\epsilon_{a_1\cdots a_n}$.

1.2 Encontrar los símbolos de Christoffel para una métrica arbitraria en una base en la que es diagonal.

1.3 Calcular las componentes de la derivada de Lie de un tensor arbitrario en términos de la derivada ordinaria y de cualquier derivada covariante simétrica.

1.4 Demostrar que la derivada covariante ordinaria es una derivada covariante. Encontrar la relación entre los símbolos de Christoffel de una conexión asociados a bases coordenadas diferentes. Demostrar que los símbolos de Christoffel de una conexión simétrica satisfacen la relación $2\Gamma^a_{\ [bc]}\mathbf{e}_a = [\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_b]$ y que, por tanto, en una base coordenada $\Gamma^\mu_{\ \nu\rho} = \Gamma^\mu_{\ \rho\nu}$.

1.5 Demostrar que una base del espacio tangente es coordenada si y solo si sus vectores conmutan.

1.6 Demostrar que si un vector $\boldsymbol{\xi}$ es ortogonal a una familia de hipersuperficies, entonces $\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]} = 0$. El teorema de Frobenius (ver, por ejemplo, la referencia [2]) garantiza la condición suficiente, que no demostraremos aquí.

1.7 Comprobar las siguientes expresiones en una base coordenada:

a) $\partial_\mu g^{\nu\rho} = -g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda}\partial_\mu g_{\sigma\lambda}$,

b) $\Gamma^\mu_{\ \mu\nu} = \dfrac{1}{2}\partial_\nu(\log|g|)$,

c) $g^{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\ \nu\rho} = -|g|^{-1/2}\partial_\sigma(|g|^{1/2}g^{\mu\sigma})$,

d) $\nabla_\mu(|g|^{1/2}\xi^\mu) = \partial_\mu(|g|^{1/2}\xi^\mu)$,

e) $\nabla_\nu(|g|^{1/2}T_\mu^{\ \nu}) = \partial_\nu(|g|^{1/2}T_\mu^{\ \nu}) - \Gamma^\rho_{\ \mu\nu}|g|^{1/2}T_\rho^{\ \nu}$.

1.8 Deducir la ecuación de desviación geodésica. Calcular la diferencia entre un vector y su transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada.

1.9 Demostrar las propiedades de simetría de los tensores de curvatura de una conexión métrica.

1.10 Dada la transformación conforme $\boldsymbol{g}' = \Omega^2 \boldsymbol{g}$, escribir la derivada covariante ∇' compatible con $\boldsymbol{g}'$ en términos de la derivada covariante ∇ compatible con $\boldsymbol{g}$. Encontrar los tensores de Riemann, de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de Weyl de la nueva métrica $\boldsymbol{g}'$.

1.11 Calcular los tensores de curvatura de una métrica conformemente plana.

1.12 Calcular la divergencia del tensor de Einstein y del tensor de Weyl.

1.13 Encontrar la ecuación de las geodésicas mediante un principio variacional para la longitud $l = \int \mathrm{d}t |\dot{\boldsymbol{x}}^2|^{1/2}$ y para la acción $S = \int \mathrm{d}t \dot{\boldsymbol{x}}^2$.

1.14 Demostrar que todo campo de Killing $\boldsymbol{\xi}$ satisface las siguientes propiedades:

a) $\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$,

b) $\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d$,

c) $\nabla^a \nabla_a \xi_b = -R_b{}^c \xi_c$

1.15 Dada la métrica de Robertson-Walker, calcular su tensor de Riemann y su tensor de Weyl.

1.16 Demostrar las ecuaciones de Gauss y de Gauss-Codazzi.

1.17 Demostrar el teorema de Stokes y determinar la orientación de la frontera de la variedad para que se verifique este teorema.

Tema 2

Mecánica newtoniana y relatividad especial

2.1. Mecánica newtoniana
- 2.1.1. Espaciotiempo galileano
- 2.1.2. Espaciotiempo newtoniano
- 2.1.3. El campo gravitatorio como fuerza externa
- 2.1.4. El principio de covariancia especial de Galileo

2.2. Relatividad especial

2.3. Resumen

2.4. Ejercicios

2.1. Mecánica newtoniana

Un estudio de este tema puede encontrarse, por ejemplo, en la referencia [4] y en "A.N. Bernal, M. Sánchez, *J. Math. Phys.* **44** (2003) 1129; *Leibnizian, Galilean and Newtonian structures of space-time*".

2.1.1. Espaciotiempo galileano

Un *espaciotiempo galileano* es una variedad diferenciable cuadridimensional $\mathscr{M}$ con la siguiente estructura adicional.

- *Tiempo absoluto:* Es una aplicación $t : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ y cuyo gradiente no se anula en ningún punto de la variedad, $\mathrm{d}t \neq 0$, definida de forma única salvo cambios afines, es decir, si t es el tiempo absoluto, $at + b$ con $a > 0$ también lo es.
- *Superficies de simultaneidad:* Dos *sucesos* —dos puntos de $\mathscr{M}$— p y q son simultáneos si y solo si $t(p) = t(q)$. El conjunto de sucesos simultáneos a p es una sección espacial que divide a $\mathscr{M}$ en dos regiones: el pasado y el futuro de p.
- Las secciones espaciales son variedades diferenciables tridimensionales riemannianas planas difeomorfas a $\mathbb{R}^3$.
- Una conexión compatible con el tiempo absoluto y con la métrica plana espacial.

Un espaciotiempo galileano no admite una métrica espaciotemporal debido a la incompatibilidad con el tiempo absoluto (EJERCICIO).

Diremos que un vector $\boldsymbol{w}$ es de *género tiempo* si y solo si $\langle \mathrm{d}t, \boldsymbol{w}\rangle \neq 0$ y de *género espacio* si y solo si $\langle \mathrm{d}t, \boldsymbol{w}\rangle = 0$.

Sea $\boldsymbol{t} = \partial_t$ un generador del flujo temporal absoluto, es decir, $\boldsymbol{t}(t) = \langle \mathrm{d}t, \boldsymbol{t}\rangle = 1$. Notemos que, en realidad, es suficiente exigir que $\langle \mathrm{d}t, \boldsymbol{t}\rangle = a > 0$. Sin pérdida de generalidad, hemos elegido $a = 1$ pues diferentes valores de a corresponden a diferentes sistemas de unidades temporales. Cualquier curva cuyo vector tangente $\boldsymbol{t}$ satisfaga esta condición está parametrizada por el tiempo absoluto y representa la trayectoria espaciotemporal de un observador, que llamaremos *observador fundamental*, cuyo reloj mide el tiempo absoluto. La diferencia entre dos observadores fundamentales con vectores tangentes $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{v}$ es un vector espacial que representa la velocidad espacial con la que se separan (en realidad, $\boldsymbol{v}$ podría tener una componente temporal constante que, como hemos visto, induciría simplemente un cambio de unidades temporales).

Sea $\boldsymbol{h}$ la métrica plana de las secciones espaciales, es decir, el *push-forward* de la métrica plana en $\mathbb{R}^3$, que actúa solo sobre tensores espaciales. Puesto que la conexión en esta variedad es plana, las coordenadas normales centradas en un punto o asociadas con una base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ del espacio tangente, donde los vectores $\boldsymbol{e}_i$ son ortonormales, son rectas no solo localmente sino globalmente. En este sistema cartesiano de coordenadas centrado en el punto o, el tensor métrico se puede escribir como $h_{ab} = e_a{}^i e_b{}^j \delta_{ij}$.

Para determinar completamente la estructura espaciotemporal, nos queda fijar una conexión espaciotemporal. Veamos cuál es la conexión espaciotemporal ∇ más general compatible con la estructura de tiempo absoluto y de secciones planas, es decir, tal que $\nabla(\mathrm{d}t) = 0$ y $\nabla \boldsymbol{h} = 0$. Para ello, elegimos una base coordenada, escribimos la conexión más general en términos de la derivada ordinaria asociada a esa base y los símbolos de Christoffel, que determinaremos a partir de las condiciones de compatibilidad. Aunque para este cometido sirve cualquier base coordenada, elegiremos por sencillez una que contenga los vectores espaciales ortonormales $\boldsymbol{e}_i$ que, en principio, podrían depender de la sección espacial, es decir, del tiempo absoluto t. Sin embargo, para que, dado un cuarto vector $\boldsymbol{t} = \partial_t$ asociado a un observador fundamental, el conjunto sea una base coordenada, se debe satisfacer que $[\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu] = 0$, lo que implica (EJERCICIO) que $\partial_t \boldsymbol{e}_i = 0$. A la vista de esta condición, resulta conveniente escoger un *sistema de referencia fundamental* $S = \{o, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_i\}$ definido por el centro o y la base coordenada $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_i\}$ del espacio vectorial tangente.

La condición de compatibilidad de la derivada covariante ∇ con el tiempo absoluto adquiere la siguiente forma en este sistema de referencia:

$$0 = \nabla_\mu(\partial_\nu t) = \partial_\mu \partial_\nu t - \Gamma^\gamma{}_{\nu\mu} \partial_\gamma t = -\Gamma^0{}_{\mu\nu}.$$

La compatibilidad con la métrica espacial implica que

$$0 = \nabla_\mu \delta_{ij} = -2\Gamma^l{}_{\mu(i} \delta_{j)l},$$

Las componentes espaciales ($\mu = k$) de esta ecuación se traducen en que la parte espacial del símbolo de Christoffel se debe anular, $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ (en efecto, $\Gamma^i{}_{jk}$ son las componentes espaciales de la conexión compatible con la métrica plana en coordenadas cartesianas). La componente temporal ($\mu = 0$), nos dice que $\Gamma^l{}_{0i}\delta_{jl} = \Gamma^l{}_{0[i}\delta_{j]l} \equiv -\epsilon_{ijk}\omega^k$. Por tanto, las componentes en esta base de la conexión más general compatible con la estructura de espaciotiempo galileano son

$$\Gamma^\gamma{}_{\nu\mu} = 0, \quad \text{excepto} \quad \Gamma^i{}_{00} \equiv -g^i, \quad \Gamma^i{}_{0j} \equiv -\epsilon^i{}_{jk}\omega^k.$$

Esta conexión galileana queda completamente determinada por los vectores espaciales $\boldsymbol{g} = -\nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e}_i \epsilon^{ij}{}_k \nabla_j t^k/2$ o, en componentes, $g^a = -t^b \nabla_b t^a$ y $\omega^a = e_i{}^a \epsilon^{ij}{}_k \nabla_j t^k/2$ que reciben el nombre de *campo gravitatorio y de vorticidad*,

respectivamente, del observador fundamental S (cuyas trayectorias son tangentes al vector $\boldsymbol{t}$). Es fácil ver que las vorticidades de dos observadores fundamentales cualesquiera tales que $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{v}$ están relacionadas mediante la expresión $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \boldsymbol{v}$ (EJERCICIO). Así, la condición necesaria y suficiente para que un espaciotiempo galileano no tenga vorticidad intrínseca (es decir, para que exista un observador fundamental sin vorticidad) es que la vorticidad de cualquier sistema de referencia fundamental se pueda escribir como el rotacional (obviamente espacial) de un campo vectorial espacial.

Llamaremos *sistemas de referencia newtonianos*, si existen, a los sistemas de referencia que no tienen vorticidad y tales que la conexión galileana permanece invariada, es decir, es invariante bajo difeomorfismos temporales generados por $\boldsymbol{t}$. Evidentemente, la condición de que se preserve la conexión en el flujo temporal galileano implica que $\pounds_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{g} = 0$ o, lo que es lo mismo, que el campo gravitatorio $\boldsymbol{g}$ debe ser independiente del tiempo absoluto t.

2.1.2. Espaciotiempo newtoniano

Un *espaciotiempo newtoniano* es un espaciotiempo galileano sin vorticidad intrínseca, es decir, tal que admite un sistema de referencia newtoniano. Al considerar solo espaciotiempos newtonianos, es decir, al restringir las conexiones galileanas de forma que no tengan vorticidad, excluimos comportamientos que no se observan experimentalmente (por ejemplo, la imposibilidad de tener fluidos en reposo). Obviamente, que el espaciotiempo no tenga vorticidad intrínseca no quiere decir que en ciertos sistemas de referencia no se observe vorticidad. Aunque, en general, un espaciotiempo galileano arbitrario no admitirá observadores newtonianos, nosotros consideraremos solo espaciotiempos que sí los admiten.

En un sistema de referencia newtoniano para el que el campo gravitatorio es $\boldsymbol{g}$, las únicas componentes independientes no nulas del tensor de Riemann son (EJERCICIO)

$$R_{0k0}{}^{i} = -\partial_k g^i.$$

En una base arbitraria, este tensor se puede escribir (EJERCICIO) de la forma $R_{abc}{}^{d} = -2\partial_{[a}t\nabla_{b]}g^d\partial_c t$. Calculando su traza, obtenemos (EJERCICIO) el tensor de Ricci $R_{ab} = -\partial_a t\partial_b t\nabla_c g^c$. En las regiones que no contienen fuentes del campo gravitatorio, la divergencia del mismo se anula y también lo hace el tensor de Ricci. Por tanto, en estas regiones, el tensor de Riemann es igual al de Weyl, que no se anula en general y que determina la desviación geodésica.

El principio de covariancia general nos sugiere que, para describir las leyes de la mecánica, deberíamos utilizar tensores definidos sobre la variedad espaciotemporal permitiendo que, en dichas leyes, aparezca la estructura espaciotemporal

galileana: el tiempo absoluto, las secciones espaciales riemannianas planas, el campo gravitatorio y la vorticidad.

Si una partícula no se ve afectada por ningún agente externo, es decir, es libre, no existe ninguna razón para que cambie su estado de movimiento. En otras palabras, no existe ninguna razón para que el vector tangente $\dot{x}^a$ de la trayectoria espaciotemporal de una partícula libre se modifique en su evolución. Si lo hiciera, deberíamos ser capaces de identificar la causa. Por tanto, el vector tangente de la trayectoria de una partícula libre es transportado paralelamente a lo largo de la misma y es, por tanto, una geodésica. Si la partícula no es libre, el vector tangente ya no será transportado paralelamente. Una posible razón para este comportamiento es que no se haya utilizado el tiempo absoluto como parámetro de evolución pero, dado que el tiempo absoluto forma parte de la estructura espaciotemporal, esta razón es claramente espuria. En lo que sigue, siempre utilizaremos el tiempo absoluto como parámetro de evolución, de forma que $\langle \mathrm{d}t, \dot{\boldsymbol{x}} \rangle = \partial_a t \dot{x}^a = 1$. El cambio de dicho vector tangente será causado por algún agente externo que llamaremos *fuerza*. Además, llamaremos *masa* de un cuerpo a la magnitud física que da cuenta de su resistencia al cambio de estado de movimiento ante las fuerzas externas. Por tanto, la ecuación que rige el movimiento de un cuerpo afectado por fuerzas externas es

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}/m, \qquad \ddot{x}^a = \dot{x}^b \nabla_b \dot{x}^a = f^a/m,$$

donde $\boldsymbol{f}$ es la suma total de todas las fuerzas espaciales (no gravitatorias) que actúan sobre él y m es su masa. Las fuerzas son tensores espaciales puesto que, si multiplicamos esta ecuación por $\partial_a t$, vemos que la compatibilidad de la conexión con el tiempo absoluto exige que $\partial_a t f^a = 0$ para que $\langle \mathrm{d}t, \dot{\boldsymbol{x}} \rangle = \partial_a t \dot{x}^a$ permanezca constante. Esta ecuación es covariante general puesto que, en ella, las únicas cantidades que afectan a la estructura espaciotemporal son las que definen dicha estructura.

La siguiente cuestión es saber, dado un sistema de referencia newtoniano $S = \{o, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_i\}$ que observa un campo gravitatorio $\boldsymbol{g}$, qué otros sistemas newtonianos $S' = \{o', \boldsymbol{t}', \boldsymbol{e}'_{i'}\}$ observarán el mismo campo gravitatorio $\boldsymbol{g}$. Como vimos, dado un observador fundamental $\boldsymbol{t}$, cualquier otro $\boldsymbol{t}'$ tal que $\langle \mathrm{d}t, \boldsymbol{t}' \rangle = 1$ es de la forma $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{v}$ donde $\boldsymbol{v}$ es un vector espacial arbitrario. Mediante la elección adecuada de la base espacial, podemos conseguir una base coordenada del espacio tangente: la condición es que $\boldsymbol{t}'$ y $\boldsymbol{e}'_{i'} = e_{i'}{}^i \boldsymbol{e}_i$ conmuten. Esta condición se traduce en $\partial_i v^j = e_i{}^{i'} \partial_t e_{i'}{}^j$. Si $\boldsymbol{v}$ depende de la posición espacial, entonces el sistema S' notará una vorticidad igual al rotacional de $\boldsymbol{v}$ (fuerzas de inercia: centrífugas y de Coriolis; EJERCICIO), luego $\boldsymbol{v}$ solo puede depender del tiempo. Esto implica que la base espacial $\{\boldsymbol{e}'_{i'}\}$ debe ser la misma que $\{\boldsymbol{e}_i\}$ salvo una rotación constante. El campo gravitatorio asociado a estos dos sistemas newtonianos se

puede relacionar notando que

$$\boldsymbol{g}' = -\nabla_{t'}\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{g} - \partial_t \boldsymbol{v}.$$

Por tanto, para que ambos sistemas newtonianos observen el mismo campo gravitatorio, la diferencia entre sus vectores temporales debe ser un vector espacial $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$ uniforme y constante, que es la velocidad relativa entre ambos observadores. Por tanto, dos sistemas newtonianos verán el mismo campo gravitatorio si y solo si tienen una velocidad relativa constante.

Existen sistemas de referencia newtonianos que no observan campo gravitatorio localmente: si en el sistema newtoniano S se observa un campo gravitatorio $\boldsymbol{g}$, otro sistema newtoniano S' que se mueva con aceleración $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g}_0$, donde $\boldsymbol{g}_0$ es el valor de $\boldsymbol{g}$ en el punto o, es decir, tal que $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{g}_0 t + \boldsymbol{v}_0$, verá localmente (en las inmediaciones del punto o) un campo gravitatorio $\boldsymbol{g}' = 0$. Estos sistemas reciben el nombre de *sistemas de referencia inerciales locales*. En estos sistemas, hemos anulado localmente el campo gravitatorio pero, si $\boldsymbol{g}$ no es uniforme, el tensor de Riemann no se anulará y veremos desviaciones geodésicas determinadas por

$$\ddot{z}^0 = 0, \qquad \ddot{z}^i = z^k \partial_k g^i$$

en todos los sistemas —inerciales o no— de referencia. Todos los sistemas inerciales locales observan el mismo campo gravitatorio nulo y, por tanto, tienen velocidad relativa constante.

Con el fin de establecer contacto con el lenguaje de coordenadas, escribamos la relación entre dos sistemas de referencia inerciales locales S y S' en términos de transformaciones de coordenadas. En el sistema inercial S, un vector cualquiera $\boldsymbol{w}$ se puede escribir como $\boldsymbol{w} = w^0 \boldsymbol{t} + w^i \boldsymbol{e}_i$. En el sistema inercial S', el vector $\boldsymbol{w}$ tendrá una expresión análoga: $\boldsymbol{w} = w'^0 \boldsymbol{t}' + w'^{i'} \boldsymbol{e}'_{i'}$. Igualando ambas expresiones y teniendo en cuenta la relación entre los flujos temporales de ambos sistemas $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{v}_0$, donde $\boldsymbol{v}_0$ es un vector espacial uniforme y constante que representa su velocidad relativa, obtenemos la expresión de las componentes de $\boldsymbol{w}$ en un sistema en términos de las componentes en el otro:

$$w'^0 = w^0, \qquad w'^{i'} = e_i{}^{i'}(w^i - v^i w^0).$$

En particular, si un punto p está descrito por coordenadas x^μ en el sistema S, por coordenadas $x'^{\mu'}$ en S' y llamamos d^μ a las coordenadas del punto o' en S, ambas están relacionadas mediante $op = oo' + o'p$, es decir, $(x^\mu - d^\mu)\boldsymbol{e}_\mu = x'^{\mu'}\boldsymbol{e}'_{\mu'}$. Por lo tanto, separando las componentes espaciales y temporal, obtenemos las conocidas expresiones

$$x'^0 = x^0 - d^0, \qquad x'^{i'} = e_i{}^{i'}[x^i - v^i(x^0 - d^0) - d^i].$$

La conexión ∇ no es una conexión métrica. En efecto, si lo fuese, su tensor de Riemann satisfaría la siguiente condición de simetría: $R_{ab(cd)} = 0$ lo que implica que $R_{ab(c}{}^{e}\gamma_{d)e} = 0$, donde $\boldsymbol{\gamma}$ sería la métrica tal que $\nabla\boldsymbol{\gamma} = 0$. En particular, en el sistema S, esta condición implica que

$$R_{0i0}{}^{j}\gamma_{\sigma j} + R_{0i\sigma}{}^{j}\gamma_{0j} = 0.$$

Si imponemos la condición de que $\partial_i g^j$ sea una matriz invertible (lo que se verifica genéricamente), obtenemos que $\gamma_{\sigma j} = 0$, es decir, que la única componente no nula de la métrica es γ_{00} y, por tanto, se trata de una métrica degenerada. En general, de acuerdo con esta ecuación, $\boldsymbol{\gamma}$ podrá tener un número máximo de autovalores no nulos determinado por el grado de degeneración de $\partial_i g^j$. El único caso en el que esta ecuación no implica la degeneración de $\boldsymbol{\gamma}$ es aquel para el que $\partial_i g^j = 0$, es decir, cuando la conexión es plana.

2.1.3. El campo gravitatorio como fuerza externa

El campo gravitatorio forma parte de la estructura espaciotemporal de acuerdo con la descripción que acabamos de ver. En este apartado, introduciremos el campo gravitatorio como una fuerza externa y no como parte del espaciotiempo: supondremos que tenemos un espaciotiempo newtoniano con una conexión plana y, por tanto, sin campo gravitatorio intrínseco en el sentido del apartado anterior. En esta situación, el tensor de Riemann se anula y no existen fuerzas de marea. Esto implica que los sistemas de referencia inerciales locales son inerciales globalmente.

Sea $\tilde{S}$ un sistema de referencia inercial global en un espaciotiempo newtoniano con una conexión plana $\tilde{\nabla}$. Es claro que esta derivada covariante se reduce a la derivada ordinaria en el sistema $\tilde{S}$. Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo sometido a fuerzas externas cuya suma total es $\boldsymbol{f}_{\text{T}}$ serán (segunda ley de Newton)

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_{\text{T}}/m, \qquad \ddot{x}^a = \dot{x}^b\tilde{\nabla}_b\dot{x}^a = f^a_{\text{T}}/m.$$

En ausencia de fuerzas externas y en un sistema inercial cualquiera, estas ecuaciones se reducen a $\ddot{x}^0 = \ddot{x}^i = 0$ (primera ley de Newton, principio de relatividad de Galileo). La fuerza total que actúa sobre el cuerpo de masa m será la suma de las fuerzas no gravitatorias $\boldsymbol{f}$ más la fuerza gravitatoria (en el sentido tradicional, es decir, como una fuerza más). El *principio de equivalencia débil* afirma que dicha fuerza es de la forma $m\boldsymbol{g}$, puesto que todos los cuerpos se mueven de la misma manera en un campo gravitatorio. Por tanto, puedo escribir $\boldsymbol{f}_{\text{T}} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}$ y la ecuación de movimiento queda

$$\dot{x}^b\tilde{\nabla}_b\dot{x}^a = f^a/m + g^a.$$

Si el campo gravitatorio $\boldsymbol{g}$ es uniforme, entonces podemos absorberlo completamente mediante un cambio de sistema de referencia de $\tilde{S}$ a uno acelerado S cuyo vector temporal es de la forma $\boldsymbol{t} = \tilde{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{g}t$: en ausencia de fuerzas no gravitatorias, la velocidad con que se separan dos geodésicas no cambia, es decir, no hay fuerzas de marea. Entonces, puedo definir una nueva derivada covariante ∇ tal que en el sistema S se reduce a la derivada ordinaria. La diferencia entre ∇ y $\tilde{\nabla}$ está determinada por el tensor $C^a{}_{bc} = -g^a \partial_b t \partial_c t$. En otras palabras, simplemente hemos cambiado la definición de sistema inercial global, pero la nueva derivada covariante sigue siendo plana.

Si el campo gravitatorio no es uniforme, la situación es similar, aunque con diferencias: podemos absorberlo solo localmente mediante el mismo cambio del sistema $\tilde{S}$ al sistema de referencia S con aceleración $\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{g}(o)$. La diferencia más importante estriba en que la aceleración con que se separan dos geodésicas ahora es $\ddot{z}^i = -z^k \partial_k g^i$. Puesto que puedo compensar $\boldsymbol{g}$ localmente con un cambio de sistema de referencia, podré describirlo en el mismo lenguaje que los cambios de sistemas de referencia, como ocurre en el caso anterior: mediante la introducción de la nueva conexión ∇ cuyas componentes son $\Gamma^a{}_{bc} = \tilde{\Gamma}^a{}_{bc} + C^a{}_{bc}$ donde $\boldsymbol{C}$ es el tensor de componentes $C^a{}_{bc} = -g^a \partial_b t \partial_c t$. Esta nueva conexión ∇ que hemos introducido ya no es plana.

Hemos visto que el campo gravitatorio newtoniano admite dos descripciones equivalentes:

- conexión espaciotemporal plana más fuerza gravitatoria externa mg^a (en este apartado),
- conexión espaciotemporal no plana cuyo tensor de Riemann depende del gradiente de g^a, sin campo gravitatorio externo (en el apartado anterior).

Ambas descripciones son equivalentes gracias al principio de equivalencia débil. La primera descripción nos muestra el campo gravitatorio como una fuerza de carácter universal; la segunda utiliza esa universalidad para incluirlo en la estructura espaciotemporal puesto que todos los cuerpos lo sufren de la misma manera.

Puesto que el campo gravitatorio es conservativo, existe una función escalar V llamada *potencial gravitatorio* tal que $g^a = -h^{ab} \partial_b V$. Esta propiedad también se puede imponer mediante una condición de acción simétrica del tensor de Riemann sobre vectores espaciales (ver referencia [4]).

2.1.4. El principio de covariancia especial de Galileo

Hasta ahora no hemos hecho un uso constructivo sino deductivo de las simetrías. Sin embargo, las simetrías nos permiten, mediante el principio de covarian-

cia especial, construir las leyes de la física (de la mecánica, en este caso). En este apartado, reproduciremos las leyes de movimiento de la mecánica newtoniana de los apartados anteriores haciendo uso del principio de relatividad especial de Galileo.

La estructura de partida va a ser un espaciotiempo con un tiempo absoluto cuyas secciones espaciales son riemannianas, no necesariamente planas a priori, y una conexión $\tilde{\nabla}$ compatible con la métrica espacial. El *principio de covariancia especial de Galileo* afirma que existen sistemas de referencia globales —que llamaremos inerciales— en los que, si sobre un cuerpo no actúan agentes externos, éste se mueve con velocidad uniforme y constante, es decir, existe un sistema $S = \{o, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_i\}$ en el que las ecuaciones de movimiento $\dot{x}^b \tilde{\nabla}_b \dot{x}^a = 0$ de un cuerpo libre son $\ddot{x}^0 = \ddot{x}^i = 0$. Por tanto, las componentes de $\tilde{\nabla}$ en esta base se anulan, es decir, $\tilde{\nabla}$ coincide con la derivada ordinaria. Además, la derivada covariante $\tilde{\nabla}$ es una conexión plana puesto que la ecuación de desviación geodésica es $\ddot{\boldsymbol{z}} = 0$, lo que implica que el tensor de Riemann se anula. La compatibilidad con la métrica en este sistema implica que $\partial_i h_{jk} = 0$. Un proceso trivial de ortonormalización nos conduce a $h_{jk} = \delta_{jk}$. Además, esta conexión es compatible con el tiempo absoluto: en el sistema S, tenemos $\partial_\mu \partial_\nu t = 0$ lo que implica que $\tilde{\nabla}(\mathrm{d}t) = 0$.

En presencia de agentes externos, $\ddot{\boldsymbol{x}}$ no se anulará y, por tanto, será igual a un tensor $\boldsymbol{f}_{\mathrm{T}}/m$. Puesto que $\partial_a t \ddot{x}^a = 0$, este tensor $\boldsymbol{f}_{\mathrm{T}}$ es espacial. Vemos que el uso del principio de covariancia especial nos ha permitido construir la teoría newtoniana completa, a partir de un principio de simetría.

2.2. Relatividad especial

El *espaciotiempo de la relatividad especial* es una variedad diferenciable pseudoriemanniana cuadridimensional $\mathscr{M}$ junto con una métrica lorentziana plana η_{ab}. La única conexión ∇ compatible con la métrica es aquella que se reduce a la derivada ordinaria en la base ortonormal de coordenadas normales $\boldsymbol{e}_\mu$, es decir, es la derivada covariante ordinaria asociada a esta base. Las relaciones de simultaneidad y causalidad respecto a un punto p están definidas por su cono de luz.

El principio de covariancia general nos sugiere que, para describir las leyes de la mecánica, deberíamos utilizar tensores definidos sobre la variedad espaciotemporal, permitiendo que, en dichas leyes, aparezca la estructura adicional de la métrica lorentziana plana.

Los cuerpos siguen geodésicas temporales de ∇ y, si no lo hacen, es porque existen agentes externos (fuerzas espaciotemporales) y su movimiento obedece la ecuación

$$\dot{x}^b \nabla_b \dot{x}^a = f_{\mathrm{T}}^a / m.$$

Existen sistemas de referencia privilegiados, que llamaremos inerciales, en los que las componentes de la métrica son $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$. En estos sistemas, las ecuaciones de movimiento adquieren una forma especialmente simple: $\ddot{x}^\mu = f^\mu_{\mathrm{T}}/m$. Un observador que utilice los vectores $\boldsymbol{e}_\mu$ de un sistema inercial para contraer los tensores que describen las magnitudes físicas y obtener así números contrastables con los experimentos verá que las trayectorias de los cuerpos libres son rectas: $x^\mu = \langle \boldsymbol{e}^\mu, \boldsymbol{x}\rangle = v^\mu \tau + z^\mu$, con v^μ y z^μ constantes. Otros observadores verán una dependencia temporal más complicada.

Dados dos sistemas inerciales $S = \{o, \boldsymbol{e}_\mu\}$ y $S' = \{o', \boldsymbol{e}'_\mu\}$, los vectores de las bases de los espacios tangentes están relacionados mediante transformaciones $\boldsymbol{e}'_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu} \boldsymbol{e}_\mu$ que preservan la forma de la métrica $\eta_{\mu\nu}$, es decir, tales que $\Lambda_{\mu'}{}^{\mu}\Lambda_{\nu'}{}^{\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}$. Además, el nuevo origen o' se obtiene a partir del punto o mediante un simple desplazamiento. En términos de coordenadas, las transformaciones más generales que preservan esta estructura inercial son las correspondientes al grupo de Poincaré:

$$x'^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu}(x^\mu - d^\mu),$$

donde $\Lambda^\mu_{\ \nu} = (\Lambda^{-1})_\nu{}^\mu$ son las matrices de Lorentz y d^μ son las coordenadas de o' en el sistema S.

El *principio de equivalencia fuerte* afirma que todos los cuerpos y posibles contenidos energéticos en general siguen la mismas trayectorias en un campo gravitatorio y que, por tanto, los campos gravitatorios se pueden anular localmente mediante fuerzas de inercia. Para que esto sea posible, los campos gravitatorios deben tener la misma estructura que las fuerzas de inercia, es decir, las componentes de la fuerza gravitatoria tienen que ser expresables en términos de conexiones ∇ o, lo que es lo mismo, en términos de tensores $C^a_{\ bc}$ con la misma estructura que las componentes de una conexión. Así, en presencia de un campo gravitatorio, los cuerpos seguirán trayectorias determinadas por la ecuación

$$\dot{x}^b \nabla_b \dot{x}^a + C^a_{\ bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = f^a/m,$$

que podemos reescribir como

$$\dot{x}^b \nabla'_b \dot{x}^a = f^a/m,$$

donde f^a representa las fuerzas no gravitatorias. En esta ecuación, ∇' es una conexión afín simétrica no plana que da cuenta del campo gravitatorio y cuyas componentes son $\Gamma'^a_{\ bc} = \Gamma^a_{\ bc} + C^a_{\ bc}$. Es importante notar que esta conexión no es métrica. Es posible encontrar bases coordenadas locales privilegiadas en las que los tensores de Christoffel de esta conexión asociados a las mismas se anulan: son las bases de coordenadas normales que permiten definir los sistemas

inerciales locales. El tensor de Riemann no se anulará en general y dará lugar a las fuerzas de marea.

El paso que dio lugar a la relatividad general fue convertir la conexión que contempla el campo gravitatorio en una conexión métrica. El precio a pagar es eliminar la estructura métrica plana y sustituirla por una métrica espaciotemporal curva.

2.3. Resumen

A la vista de lo expuesto hasta ahora, algunas ideas que van a desempeñar un papel fundamental en la descripción del movimiento relativista en un campo gravitatorio son las siguientes.

- Las fuerzas de inercia y las fuerzas gravitatorias son localmente equivalentes.
- Esta equivalencia permite anular localmente el campo gravitatorio mediante caída libre (sistemas de referencia inerciales locales). No existe, por tanto, una forma clara y única de describir la gravedad como un campo de fuerzas. La gravedad es un aspecto más de la estructura espaciotemporal cuyas consecuencias observables son las fuerzas de marea.
- En estos sistemas de referencia inerciales locales se recuperan las leyes de la relatividad especial. Alternativamente, conocidas estas leyes en caída libre, su formulación en cualquier otro sistema de referencia se obtiene mediante la acción sobre las mismas de la transformación que relaciona ambos sistemas de referencia.
- Las fuerzas de marea determinan el rango de validez de la relatividad especial en los sistemas en caída libre.
- Las conexiones afines proporcionan un lenguaje unificado para las fuerzas de inercia y las gravitatorias. Tanto en el espacio newtoniano como en relatividad especial, aparece una conexión afín no métrica para describir el campo gravitatorio en un lenguaje cuadridimensional. Las conexiones que describen las fuerzas de inercia son planas mientras que, si tenemos un campo gravitatorio intrínseco, la conexión que lo caracteriza no es plana. El hecho de que la conexión no pueda ser plana se debe a las fuerzas de marea.
- La unificación entre fuerzas de inercia y gravitatorias es completa si la gravedad está descrita mediante una conexión métrica no plana. El uso de esta

conexión métrica exige obviamente la introducción en nuestro espaciotiempo de métricas que no son planas.

Teniendo en cuenta estas ideas, describiremos el campo gravitatorio, incluso en el régimen relativista, mediante una conexión afín simétrica. En este caso, debemos asegurarnos de que se verifican varias condiciones. La primera condición es que la conexión se pueda anular localmente. Esto está garantizado puesto que las coordenadas normales (caída libre) hacen precisamente eso. Además, en ausencia de gravedad, la relatividad especial debe ser válida. La relatividad especial es una teoría métrica y la conexión es compatible con la métrica en esta base de coordenadas normales. Ésta es una relación tensorial luego la conexión debe ser métrica.

A modo de resumen, vemos que el principio de equivalencia fuerte —la equivalencia local de gravedad y aceleración— y la hipótesis de que en caída libre se recupera la relatividad especial permiten describir el campo gravitatorio mediante una conexión afín métrica; las geodésicas de esta conexión son las trayectorias de caída libre.

2.4. Ejercicios

2.1 Demostrar que un tiempo absoluto es incompatible con una métrica espacio-temporal.

2.2 Encontrar la ecuación de desviación geodésica espacial en términos de la vorticidad y del campo gravitatorio.

2.3 Estudiar las fuerzas de inercia en un espaciotiempo newtoniano sin campo gravitatorio intrínseco.

2.4 Estimar las mareas creadas por la Luna y por el Sol en la Tierra.

2.5 Calcular los tensores de Riemann y de Ricci de un espaciotiempo newtoniano tanto en un sistema de referencia newtoniano como en una base arbitraria.

Tema 3

Teoría general de la relatividad

3.1. La variedad espaciotemporal
3.2. Los campos materiales
- 3.2.1. Postulados
- 3.2.2. Sistemas lagrangianos
- 3.2.3. Fluidos perfectos
- 3.2.4. Condiciones de energía
- 3.2.5. Aproximación newtoniana
  - 3.2.5.1. Gravedad newtoniana
  - 3.2.5.2. Fluidos newtonianos

3.3. Dinámica del campo gravitatorio
- 3.3.1. Motivación
- 3.3.2. Ecuaciones dinámicas del campo gravitatorio
- 3.3.3. Principio variacional
- 3.3.4. Ligaduras y ecuaciones dinámicas
  - 3.3.4.1. Campo electromagnético
  - 3.3.4.2. Campo gravitatorio

3.4. Estrellas relativistas (esféricas y estáticas)
- 3.4.1. Ecuaciones dinámicas
- 3.4.2. Solución exterior
- 3.4.3. Solución interior
- 3.4.4. Límite newtoniano
- 3.4.5. Colapso gravitatorio

3.5. Ejercicios

3.1. La variedad espaciotemporal

El *espaciotiempo* es el conjunto de todos los sucesos y está descrito por una variedad diferenciable pseudoriemanniana conexa $(\mathscr{M}, \boldsymbol{g})$ de clase C^∞, donde $\boldsymbol{g}$ es una métrica lorentziana. Esta variedad está definida salvo isometrías (difeomorfismos que preservan la métrica). Más específicamente, dos variedades $(\mathscr{M}, \boldsymbol{g})$ y $(\mathscr{M}', \boldsymbol{g}')$ representan el mismo espaciotiempo si y solo si existe un difeomorfismo $\theta : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ tal que $\theta_* \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}'$, lo que nos deja libertad para elegir las coordenadas adecuadas en cada carta.

No nos preocuparemos por el orden de diferenciabilidad (que, en la práctica, no es fácil de determinar puesto que las medidas siempre involucran una integración sobre una región espaciotemporal) y, por tanto, supondremos que es C^∞.

La existencia de una métrica lorentziana (y la condición Hausdorff implícita) garantiza la paracompacidad del espaciotiempo (ver, por ejemplo, referencia [3]).

La presencia de la métrica lorentziana $\boldsymbol{g}$ separa naturalmente el espacio tangente T_p en cualquier punto $p \in \mathscr{M}$ en vectores $\boldsymbol{v}$ temporales, espaciales o nulos dependiendo de si $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ es negativo, positivo o cero respectivamente.

Un espaciotiempo $(\mathscr{M}, \boldsymbol{g})$ es *extensible analíticamente* si y solo si existe otro espaciotiempo más grande $(\mathscr{M}', \boldsymbol{g}')$ en el que el primero está embebido isométricamente. Un espaciotiempo es la *extensión analítica máxima* de otro espaciotiempo si y solo si el primero es una extensión analítica del segundo que no es extensible.[1] Las situaciones típicas en las que es necesario realizar una extensión analítica son los espaciotiempos con métricas que presentan singularidades coordenadas. Una extensión analítica máxima de un espaciotiempo se puede obtener extendiendo máximamente todas las geodésicas (es decir, agotando todo el recorrido de sus parámetros afines), mediante los cambios de coordenadas adecuados, y eliminando así todas las singularidades coordenadas.

EJERCICIO: Encontrar una extensión analítica máxima del *espaciotiempo de Rindler*, definido por la métrica bidimensional $\mathrm{d}s^2 = -(ax)^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$.

El espaciotiempo debe contener todos los puntos que no son singulares. Si fuera extensible, los puntos de la extensión deberían ser considerados puntos del espaciotiempo. Por ello, exigiremos que el espaciotiempo no sea extensible analíticamente.

Diremos que un espaciotiempo satisface la *condición temporal de convergencia* si y solo si $R_{ab} u^a u^b \geq 0$ para todo vector temporal u^a. Diremos que un espaciotiempo satisface la *condición nula de convergencia* si y solo si $R_{ab} k^a k^b \geq 0$

[1] Las extensiones analíticas máximas no son necesariamente únicas (ejemplo: Taub-NUT). Ver, por ejemplo, la referencia [3].

para todo vector nulo k^a. Estas condiciones pueden interpretarse en términos del carácter atractivo de la gravedad, como veremos en § 4.4.1.

3.2. Los campos materiales

3.2.1. Postulados

Hemos visto que, en caída libre, debemos recuperar las leyes de la relatividad especial. Esto nos hace considerar la posibilidad de que los campos materiales puedan estar descritos por los mismos tensores que en relatividad especial, si bien sus ecuaciones dinámicas se verán modificadas para acomodarse a un espaciotiempo curvo. Este principio y el de covariancia general sugieren que estas ecuaciones de movimiento sean las mismas que en relatividad especial con la siguiente modificación (*acoplo mínimo*): el tensor métrico plano $\boldsymbol{\eta}$ es sustituido por $\boldsymbol{g}$ y la conexión plana compatible con $\boldsymbol{\eta}$ es sustituida por la conexión de Levi-Civita compatible con $\boldsymbol{g}$. Es importante notar que esta regla posee ambigüedades que deben ser resueltas por otros medios. Estas son las ideas subyacentes en la descripción de los campos materiales que se da a continuación.

Los campos materiales, que denotaremos genéricamente por $\boldsymbol{\psi}$, deben satisfacer los siguientes postulados:

Postulado (i) Causalidad local. Las ecuaciones de movimiento que gobiernan la evolución de los campos materiales han de ser tales que, dados dos puntos de un abierto convexo, se pueda enviar una señal entre ellos si y solo si se pueden unir mediante una curva causal (es decir, cuyo vector tangente no es espacial en ningún punto).

La causalidad local separa el tensor métrico de cualquier otro campo, proporcionándole su carácter geométrico. En efecto, estudiando qué puntos pueden comunicarse con un punto p dado, es posible determinar el conjunto de vectores nulos de T_p. Entonces, la métrica se puede determinar salvo un factor conforme (ejercicio). Además, las relaciones causales determinan la topología de la variedad diferenciable $\mathscr{M}$ (sin demostración). El factor conforme queda determinado por el postulado siguiente.

Postulado (ii) Conservación local de la energía y del momento. Las ecuaciones de movimiento de los campos materiales son tales que existe un tensor simétrico T^{ab}, el *tensor de energía-momento*, construido a partir de los campos, de sus derivadas covariante y de la métrica, tal que su divergencia es nula, es decir, $\nabla_b T^{ab} = 0$. Además, el tensor de energía-momento es nulo en un abierto si y solo si lo son los campos materiales (ver § 3.2.4, sobre las condiciones de energía).

En relatividad especial, el hecho de que se anule la divergencia del tensor de energía-momento implica que la energía se conserva. En efecto, sea v^b el vector tangente temporal a una familia de observadores inerciales de trayectorias paralelas (puesto que la métrica es plana, el transporte paralelo no depende del camino y, por tanto, $\nabla_a v^b = 0$). Si $\nabla_a T^{ab} = 0$, el vector $P^a = -T^{ab}v_b$ representa la densidad de corriente de energía medida por estos observadores y tiene divergencia nula. El teorema de Gauss aplicado a una región espaciotemporal $\mathscr{V}$ nos indica que la integral en la frontera $\partial\mathscr{V}$ se anula $\int_{\partial\mathscr{V}} P^a n_a \mathrm{d}\sigma = 0$.

En un espaciotiempo curvo genérico, el transporte paralelo depende del camino y no es posible elegir ninguna familia de observadores cuyas velocidades sean paralelas, es decir, no existe ningún campo vectorial temporal v^a tal que $\nabla_a v^b = 0$. Si existiese, satisfaría la ecuación de Killing, es decir, sería una isometría del espaciotiempo, que, en general, no existe. Esto es consistente con el hecho de que si existiese, se conservaría la energía total, lo que es incompatible con la existencia de fuerzas de marea. En efecto, las fuerzas de marea representadas por un tensor de Riemann no nulo pueden realizar trabajo e invalidar, por tanto, la conservación de la energía. Aún así, en regiones muy pequeñas, las fuerzas de marea son muy pequeñas y se pueden ignorar de forma que, para observadores muy cercanos, $\nabla_a v^b \sim 0$. Para verlo, basta con escoger un sistema (inercial) de coordenadas normales, en el que la métrica es $\eta_{\mu\nu}$, los símbolos de Christoffel se anulan en el origen y son de la forma $x^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(0)$, de manera que $\nabla_\nu v^\mu \sim \mathscr{O}(x)$. Por tanto, la energía se conserva localmente si la divergencia del tensor de energía-momento se anula.

En general, si el espaciotiempo $\mathscr{M}$ posee una isometría generada por un vector de Killing $\boldsymbol{\xi}$, entonces aparece una ley de conservación global. En efecto, si definimos $J^a = T^{ab}\xi_b$, su divergencia se anula $\nabla_a J^a = 0$ en virtud de la divergencia nula del tensor de energía-momento y de la ecuación de Killing. Integrando esta expresión en una región espaciotemporal $\mathscr{V}$ obtenemos mediante el teorema de Gauss $\int_{\partial\mathscr{V}} J^a n_a \mathrm{d}\sigma = 0$, es decir, que el flujo en la dirección del Killing $\boldsymbol{\xi}$ de la componente del tensor de energía-momento es nulo.

En relatividad especial, el espaciotiempo es plano y admite diez vectores de Killing independientes que generan las cuatro traslaciones espaciotemporales, las tres rotaciones espaciales y los tres *boosts* (transformaciones de Lorentz puras). Estos Killing determinan cantidades conservadas que corresponden al momento y al momento angular cuadridimensionales. En un espaciotiempo curvo arbitrario, estas isometrías no existen. Sin embargo, podemos introducir coordenadas normales localmente (en regiones espaciotemporales $\mathscr{V}$ arbitrariamente pequeñas), en las que el espaciotiempo es localmente minkowskiano. Aunque las cantidades $\int_{\partial\mathscr{V}} T^{ab}\xi_b n_a \mathrm{d}\sigma$ ya no se anularán exactamente, sí lo harán aproximadamente, tanto más cuanto menor sea la región $\mathscr{V}$, lo que lleva a la interpretación de la ecuación $\nabla_a T^{ab} = 0$ como una ecuación de conservación local.

Notemos que una partícula de momento p^a tendrá energía $E = -p_a v^a$ medida por un observador inercial situado junto a la partícula, como ocurre en relatividad especial, puesto que no es necesario el transporte paralelo para definir esta cantidad. Veremos que la ecuación $\nabla_a T^{ab} = 0$ para una sola partícula implica que sigue geodésicas y que, por tanto, contiene toda la información de las ecuaciones de movimiento. También es posible probar que cuerpos suficientemente pequeños como para ignorar las fuerzas de marea entre sus constituyentes siguen geodésicas, independientemente de su constitución (principio de equivalencia). Los cuerpos más grandes siguen trayectorias que no son geodésicas pero cuyas ecuaciones sí se derivan, en general, de la ecuación $\nabla_a T^{ab} = 0$ (ver referencia [2]).

Este postulado fija el factor conforme del postulado anterior salvo por una constante multiplicativa que determina las unidades de medida. En efecto, si el tensor de energía-momento tiene divergencia nula para alguna métrica $\boldsymbol{g}$, no la tendrá para otra métrica $\boldsymbol{g}' = \Omega^2 \boldsymbol{g}$.

3.2.2. Sistemas lagrangianos

Dado un sistema material, no existe en general una receta para obtener su tensor de energía-momento ni los postulados anteriores garantizan su unicidad. Sin embargo, si las ecuaciones de movimiento se pueden derivar de una acción mediante técnicas variacionales, entonces existe un procedimiento bien definido para obtener el tensor de energía-momento. Sea S_{M} la acción de un campo $\boldsymbol{\psi}$ dada, en términos de la función lagrangiana $\tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}$ y de la densidad lagrangiana $\mathscr{L}_{\text{M}} = |g|^{1/2} \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}$, por la expresión

$$S_{\text{M}} = \int_{\mathscr{M}} \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}[\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{g}] \mathrm{d}v = \int_{\mathscr{M}} \mathscr{L}_{\text{M}}[\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{g}] \mathrm{d}^4 x$$

donde hemos introducido la forma de volumen densitizada $\mathrm{d}^4 x = |g|^{-1/2} \mathrm{d}v$.

Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener mediante un principio variacional exigiendo que la acción sea estacionaria bajo variaciones de los campos $\delta\boldsymbol{\psi}$ que se anulen en la frontera del espaciotiempo. La variación de acción bajo una variación general de los campos es

$$\delta S_{\text{M}} = \int_{\mathscr{M}} \left[\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}}{\partial \boldsymbol{\psi}} \delta\boldsymbol{\psi} + \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}}{\partial \nabla_a \boldsymbol{\psi}} \delta(\nabla_a \boldsymbol{\psi}) \right] \mathrm{d}v.$$

La variación de los campos es independiente del punto y, por tanto, conmuta con

la derivada covariante. Una integral por partes nos proporciona la expresión

$$\delta S_{\rm M} = \int_{\mathscr{M}} \left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\rm M}}{\partial \boldsymbol{\psi}} - \nabla_a \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\rm M}}{\partial \nabla_a \boldsymbol{\psi}} \right) \delta\boldsymbol{\psi} \mathrm{d}v + \int_{\partial\mathscr{M}} \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\rm M}}{\partial \nabla_a \boldsymbol{\psi}} \delta\boldsymbol{\psi} n_a \mathrm{d}\sigma.$$

La condición de que los campos no varíen en la frontera permite anular el término de superficie, lo que implica que, si la acción es estacionaria entonces se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\rm M}}{\partial \boldsymbol{\psi}} - \nabla_a \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\rm M}}{\partial \nabla_a \boldsymbol{\psi}} = 0.$$

El tensor de energía momento se define como

$$T^{ab} = 2|g|^{-1/2} \frac{\delta S_{\rm M}}{\delta g_{ab}}, \qquad T_{ab} = -2|g|^{-1/2} \frac{\delta S_{\rm M}}{\delta g^{ab}}.$$

Este tensor es de divergencia nula como consecuencia de las ecuaciones de movimiento para los campos $\boldsymbol{\psi}$ y es, de hecho, la densidad de corriente Noether asociada a la invariancia bajo difeomorfismos. En efecto, consideremos la variación de la acción bajo un difeomorfismo infinitesimal generado por el campo vectorial $\boldsymbol{\xi}$ que es no nulo solo en el interior de $\mathscr{M}$:

$$\delta_{\boldsymbol{\xi}} S_{\rm M} = \int_{\mathscr{M}} \left(\frac{\delta S_{\rm M}}{\delta \boldsymbol{\psi}} \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\psi} + \frac{\delta S_{\rm M}}{\delta \boldsymbol{g}} \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{g} \right) \mathrm{d}^4x.$$

Si los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento, el primer término se anula. El segundo contiene precisamente el tensor de energía-momento. Teniendo en cuenta que $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} g_{ab} = 2\nabla_{(a}\xi_{b)}$, podemos escribir

$$\delta_{\boldsymbol{\xi}} S_{\rm M} = \frac{1}{2} \int_{\mathscr{M}} T^{ab} \mathfrak{L}_{\boldsymbol{\xi}} g_{ab} \mathrm{d}v = \int_{\mathscr{M}} T^{ab} \nabla_a \xi_b \mathrm{d}v = \int_{\mathscr{M}} [\nabla_b (T^{ab} \xi_a) - \nabla_b T^{ab} \xi_a] \mathrm{d}v.$$

El primer término es una integral de superficie que se anula puesto que $\boldsymbol{\xi}$ se anula en la frontera de $\mathscr{M}$. Por tanto, la variación de la acción es

$$\delta_{\boldsymbol{\xi}} S_{\rm M} = -\int_{\mathscr{M}} \nabla_b T^{ab} \xi_a \mathrm{d}v.$$

Si la acción de los campos es invariante bajo difeomorfismos (generados por campos vectoriales $\boldsymbol{\xi}$ arbitrarios), es decir, si $\delta_{\boldsymbol{\xi}} S_{\rm M} = 0$, la divergencia del tensor de energía-momento se anula para campos que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Obtengamos ahora la expresión del tensor de energía-momento de un sistema lagrangiano en términos de su función lagragiana. Bajo una variación δg_{ab} de la

métrica, la acción cambia en

$$\delta S_{\text{M}} = \int \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{M}}}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} \mathrm{d}^4x = \int \left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}}{\partial g_{ab}} \mathrm{d}v + \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}} \frac{\partial(\mathrm{d}v)}{\partial g_{ab}} \right) \delta g_{ab}.$$

El segundo término es la derivada de la 4-forma $\mathrm{d}v = \boldsymbol{\epsilon}/4!$ cuyas componentes son $(\mathrm{d}v)_{abcd} = |g|^{1/2}\epsilon_{abcd}$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\partial g/\partial g_{ab} = g g^{ab}$ (EJERCICIO) y que el símbolo de Levi-Civita $\boldsymbol{\epsilon}$ es independiente de la métrica, obtenemos

$$\frac{\partial(\mathrm{d}v)}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial g_{ab}} g^{-1} \mathrm{d}v = \frac{1}{2} g^{ab} \mathrm{d}v.$$

Así la variación de la acción es

$$\delta S_{\text{M}} = \int \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{M}}}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} \mathrm{d}^4x = \int \left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}}{\partial g_{ab}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}} g^{ab} \right) \delta g_{ab} \mathrm{d}v,$$

de donde podemos leer directamente la expresión del tensor de energía-momento tanto en términos de la función lagrangiana $\tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}$ como de la densidad lagrangiana $\mathscr{L}_{\text{M}}$:

$$T^{ab} = 2|g|^{-1/2} \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{M}}}{\partial g_{ab}} = 2 \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}}{\partial g_{ab}} + \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}} g^{ab},$$

$$T_{ab} = -2|g|^{-1/2} \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{M}}}{\partial g^{ab}} = -2 \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}}}{\partial g^{ab}} + \tilde{\mathscr{L}}_{\text{M}} g_{ab}.$$

EJERCICIO: Calcular el tensor de energía-momento de un campo escalar y de un campo electromagnético para obtener, respectivamente,

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi + m^2 \phi^2), \qquad T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right).$$

3.2.3. Fluidos perfectos

Consideremos una pequeña región espaciotemporal $\mathscr{V}$ que contiene un fluido perfecto, es decir, que no tiene viscosidad ni conduce el calor. Estas propiedades se traducen en que, para un observador comóvil con él, el fluido es isótropo. Veámoslo.

En un sistema de referencia comóvil con el fluido en caída libre,

- T^{00} es la densidad de energía ρ vista por dicho observador.
- T^{0i} representa el flujo de energía en la dirección i; aunque no exista movimiento del fluido, puede existir un flujo de energía por conducción de calor. La eliminación de la conducción de calor hace que $T^{0i} = 0$.

- T^{ij} representa el flujo de la componente i del momento en la dirección j, es decir, a través de la superficie perpendicular a $\boldsymbol{e}_j$. Puesto que la viscosidad induce un cambio de momento en la dirección paralela a la superficie, la ausencia de viscosidad fuerza la anulación de dicho flujo, es decir, anula los términos no diagonales de T^{ij}. Por último, los tres elementos diagonales T^{ii} son iguales puesto que si no fuese así, un cambio de sistema de referencia comóvil nos permitiría ver flujos paralelos debidos a la viscosidad. Hemos concluido que, en ausencia de viscosidad, $T^{ij} = p\delta^{ij}$. La cantidad p representa el flujo de la componente i del momento a través de la superficie perpendicular a la dirección $\boldsymbol{e}_i$ y es, por tanto, la presión de fluido (fuerza por unidad de superficie). Esta presión está causada por la interacción entre las partículas que contiene el fluido, es decir, por el movimiento aleatorio que tienen las partículas debido a las colisiones entre ellas.

En este sistema de referencia, el campo de velocidades del fluido es simplemente $u^\mu = (1,0,0,0)$, por lo que podemos escribir, en este sistema, las componentes del tensor de energía-momento como $T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$. Esta ecuación es tensorial y, por tanto, será válida en cualquier base. Así, tenemos que el tensor de energía-momento de un fluido perfecto es

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab},$$

donde $\boldsymbol{u}$ representa el campo de velocidad del fluido, es decir, sus líneas de flujo están definidas por una congruencia temporal cuyo campo vectorial tangente unitario es $\boldsymbol{u}$.

A menudo, consideraremos fluidos barotrópicos, es decir, tales que la presión p es función solo de la densidad de energía ρ.

La condición de que el tensor de energía-momento de un fluido perfecto tenga divergencia nula proporciona las ecuaciones de movimiento (EJERCICIO)

$$\begin{aligned} u^a \nabla_a \rho + (\rho + p)\nabla_a u^a &= 0, \\ (\rho + p)u^b \nabla_b u^a + (g^{ab} + u^a u^b)\nabla_b p &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se obtienen proyectando la ley de conservación $\nabla_a T^{ab} = 0$ sobre la velocidad u_b y sobre las direcciones perpendiculares a la misma, es decir, contrayendo esta ley con u_b y con $h^c{}_b = \delta^c{}_b + u^c u_b$, respectivamente. Veamos cuál es el significado de estas ecuaciones.

Para interpretar la primera ecuación, la escribiremos en términos de la densidad de partículas n en el fluido y de la entropía por partícula S. La primera ley de la termodinámica $\delta E = NT\delta S - p\delta V$ (donde E es la energía, V el volumen, T la temperatura y N el número total de partículas) se puede escribir (EJERCICIO)

en términos de la densidad de energía ρ y de la densidad de partículas n:

$$nT\delta S = \delta\rho - (p+\rho)\delta n/n.$$

Dividiendo esta ecuación por $\delta\tau$ y escribiendo $\dot{f} = u^a\nabla_a f$ obtenemos la expresión $n^2T\dot{S} = n\dot{\rho} - (p+\rho)\dot{n}$. Si sustituimos $\dot{\rho}$ en la primera ecuación de movimiento por su valor en términos de $\dot{S}$ y de $\dot{n}$, obtenemos

$$n^2T\dot{S} = -(p+\rho)\nabla_a(nu^a).$$

Esta ecuación nos indica que la entropía del fluido se conserva si el flujo de partículas nu^a se conserva.

La segunda ecuación es realmente una ecuación de movimiento que relaciona la aceleración $\dot{u}^a$ del fluido con los gradientes de presión que se comportan como campos de fuerzas, que son espaciales.

Consideremos ahora un fluido compuesto por granos de polvo, es decir, por partículas libres que no interaccionan entre sí, lo que significa que están libres de choques y de movimientos aleatorios. Tal fluido tiene presión nula y sus ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\nabla_a(\rho u^a) = 0, \qquad u^b\nabla_b u^a = 0.$$

De acuerdo con estas ecuaciones, la energía se conserva y cada una de las partículas sigue geodésicas, como no podía ser de otra manera por tratarse de partículas libres. Vemos, por tanto, que la ecuación de conservación del tensor de energía-momento contiene la ley de movimiento geodésico de las partículas libres, como ya habíamos avanzado.

3.2.4. Condiciones de energía

- Un tensor de energía-momento satisface la *condición débil de energía* si y solo si $T_{ab}v^av^b \geq 0$ para cualquier vector v^a temporal dirigido hacia el futuro.
- Un tensor de energía-momento satisface la *condición fuerte de energía* si y solo si $(T_{ab} - T^c{}_c g_{ab}/2)v^av^b \geq 0$ para cualquier vector v^a temporal dirigido hacia el futuro.
- Un tensor de energía-momento satisface la *condición dominante de energía* si y solo si el vector $-T^a{}_b v^b$ es causal dirigido hacia el futuro o se anula para cualquier vector v^a temporal dirigido hacia el futuro.

  Esta condición admite la siguiente interpretación: el flujo de energía siempre viaja con velocidad inferior a la de la luz. Más precisamente, se puede

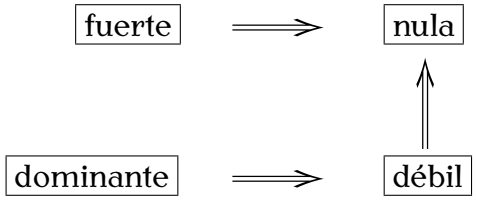


Figura 3.1: Relación entre las distintas condiciones de energía.

demostrar (ver referencia [3]) que, si el tensor de energía-momento satisface esta condición, se conserva y se anula en una hipersuperficie espacial o nula, entonces se anula en todo el futuro determinado por ella (en su dominio de dependencia).

- Un tensor de energía-momento satisface la *condición nula de energía* si y solo si $T_{ab}k^a k^b \geq 0$ para cualquier vector k^a nulo dirigido hacia el futuro.

Notemos que cualquier vector v^a de género tiempo define la trayectoria de algún posible observador. Para ese observador, la densidad de momento está dada por $-T^a{}_b v^b$ y, por tanto, la densidad de energía por ese observador es $T_{ab}v^a v^b$.

Las condiciones de energía están relacionadas, aunque la cadena de implicaciones no impone un orden, como se muestra en la figura 3.1. Notemos que la condición fuerte no implica la dominante ni la débil, es decir, existen tensores de energía-momento que satisfacen la condición fuerte pero no las otras dos. La relación entre las distintas condiciones se establece a continuación.

Si se satisface la condición fuerte o la condición débil de energía, entonces se satisface la condición nula, como se ve inmediatamente por continuidad cuando el vector temporal v^a se hace tangente al cono de luz.

Si se satisface la condición dominante de energía, entonces se satisfacen la condición débil y la nula. En efecto, si se satisface la condición dominante, entonces el vector $-T^a{}_b v^b$ es causal dirigido hacia el futuro, si v^b es un vector temporal dirigido hacia el futuro. El producto de estos dos vectores será negativo, es decir, $T_{ab}v^a v^b \geq 0$, que es la condición de energía débil.

EJERCICIO: Enunciar las condiciones de energía para un fluido perfecto en términos de condiciones para la densidad y la presión.

EJERCICIO: Determinar bajo qué condiciones un campo escalar viola alguna de las condiciones de energía.

EJERCICIO: Analizar el tensor de energía-momento correspondiente a una constante cosmológica desde el punto de vista de las condiciones de energía.

3.2.5. Aproximación newtoniana

En este apartado, reproduciremos las leyes y conceptos físicos newtonianos como límite relativista de los introducidos en un espaciotiempo curvo.

3.2.5.1. Gravedad newtoniana

Supongamos que tenemos una partícula que se mueve en un campo gravitatorio con velocidad no relativista. Escojamos una base coordenada del espacio tangente $\{\boldsymbol{e}_\mu\}$ ortonormal en la métrica plana $\boldsymbol{\eta}$. Entonces, en el orden más bajo de la expansión en $|\dot{x}^i| \ll 1$ de la ecuación de las geodésicas, obtenemos

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{00}(1 + \mathscr{O}(\dot{x}^i)) = 0.$$

Si consideramos además que el campo gravitatorio es débil, es decir, que la métrica se puede escribir como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \mathscr{O}(\gamma^2)$ y que varía lentamente, de forma que podemos ignorar su derivada temporal, obtenemos la siguiente expresión para las componentes $\Gamma^\mu{}_{00}$ de la conexión:

$$\Gamma^i{}_{00} = -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j\gamma_{00} \equiv \delta^{ij}\partial_j V, \qquad \Gamma^0{}_{00} = 0.$$

Recuperamos así la dinámica no relativista en un campo gravitatorio. Vemos que el carácter métrico de la conexión se pierde por despreciar la contribución de varias de sus componentes, no porque sean pequeñas sino porque están multiplicadas por cantidades pequeñas.

En el siguiente orden en $|\dot{x}^i|$, obtenemos

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{00} + 2\Gamma^\mu{}_{0i}\dot{x}^i = 0,$$

donde las únicas componentes no nulas que intervienen en estas ecuaciones son

$$\Gamma^i{}_{00} = -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j\gamma_{00}, \qquad \Gamma^0{}_{0i} = -\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00}, \qquad \Gamma^j{}_{0i} = \frac{1}{2}\delta^{jk}(\partial_i\gamma_{k0} - \partial_k\gamma_{i0}).$$

Si definimos el "potencial vector" $a^\mu = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\gamma_{\nu 0}$, podemos escribir estas expresiones de la siguiente forma en términos del campo gravitatorio $g_i = -\partial_i V$ (donde $a^0 = V$) y del campo *gravitomagnético* $b^k = \epsilon^{klm}\partial_l a_m$:

$$\Gamma^i{}_{00} = -g^i, \qquad \Gamma^0{}_{0i} = -g_i, \qquad \Gamma^j{}_{0i} = -2\epsilon^j{}_{ik}b^k.$$

Con estas expresiones para los símbolos de Christoffel, las ecuaciones de las geodésicas quedan

$$\ddot{x}^i - g^i - 4\epsilon^i{}_{jk}\dot{x}^j b^k = 0, \qquad \ddot{x}^0 - 2g_i\dot{x}^i = 0.$$

Esta ecuación es completamente análoga a la de la fuerza de Lorentz de la electrodinámica (excepto por el factor 4) para una carga igual a la masa. El campo gravitomagnético hace rotar a las partículas de prueba en un plano perpendicular a él (ver ejercicio 3.4). Este efecto se conoce con el nombre de *arrastre de inerciales*.

3.2.5.2. Fluidos newtonianos

Podemos escribir las ecuaciones dinámicas para un fluido relativista en el límite no relativista. Dicho límite se obtiene cuando la velocidad del flujo es pequeña (en un sistema inercial local) de forma que $u^\mu \simeq (1, v^i)$ y cuando la presión es pequeña comparada con la densidad. En este límite, la densidad de energía está dominada por la densidad de masa y las componentes del tensor de energía-momento son

$$T^{00} \simeq \rho, \qquad T^{0i} \simeq \rho v^i, \qquad T^{ij} \simeq \rho v^i v^j + p\delta^{ij}.$$

En esta aproximación, las ecuaciones de movimiento $\nabla_a T^{ab} = 0$ adquieren la forma

$$\dot\rho + \partial_i(\rho v^i) = 0, \qquad \dot v^i + v^j \partial_j v^i + \rho^{-1}\delta^{ij}\partial_j p = 0.$$

Evidentemente, estas mismas ecuaciones se obtienen de aproximar las ecuaciones de movimiento directamente. La primera es la ecuación de continuidad y la segunda la ecuación de Euler.

3.3. Dinámica del campo gravitatorio

En el tema anterior, hemos descrito las leyes de la física en un espaciotiempo predeterminado e inmutable. Ha llegado el momento de que nos ocupemos de las leyes dinámicas que rigen y determinan la estructura espaciotemporal. El espaciotiempo se convierte así en una estructura dinámica y cambiante en clara contraposición con cualquier otra teoría física a la que nos hemos enfrentado hasta ahora. En palabras de Wheeler, el espaciotiempo determina cómo ha de moverse la energía y ésta determina a su vez cómo se debe curvar el espaciotiempo.

3.3.1. Motivación

Como "motivación deductiva", consideremos los siguientes apuntes sobre la desviación geodésica de una congruencia temporal cuyo campo de velocidades es $\boldsymbol{u}$ en el contexto de la mecánica newtoniana.

- Las fuerzas de marea están determinadas por el tensor de Riemann proyectado sobre la velocidad $-R_{cbd}{}^{a}u^{c}u^{d}$.

- Recordemos que $R_{cbd}{}^{a} = -2\partial_{[c}t\nabla_{b]}g^{a}\partial_{d}t$, donde t es el tiempo absoluto, y que $\partial_{a}tu^{a} = \langle \mathrm{d}t, \boldsymbol{u}\rangle = 1$. Entonces, las fuerzas de marea están determinadas por $-R_{cbd}{}^{a}u^{c}u^{d} = \nabla_{b}g^{a}$.

- Además, la divergencia del campo gravitatorio se puede identificar con las fuentes del mismo que son las densidades de masa, de acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton: $\nabla_{a}g^{a} = -4\pi\mathrm{G}\rho$, donde G es la constante gravitatoria universal de Newton.

- El tensor de energía-momento es tal que $T_{ab}u^{a}u^{b} = \rho$, es decir, su componente temporal es la densidad de masa.

- Al menos en mecánica newtoniana, podemos escribir geométricamente la ecuación del campo gravitatorio $\nabla_{a}g^{a} = -4\pi\mathrm{G}\rho$ como

$$R_{ab}u^{a}u^{b} = 4\pi\mathrm{G}T_{ab}u^{a}u^{b}.$$

Esta ecuación llevó a Einstein a postular la ecuación $R_{ab} = 4\pi\mathrm{G}T_{ab}$ como la ecuación dinámica del campo gravitatorio. Sin embargo, esta ecuación tiene un problema grave: la divergencia del tensor de energía-momento se anula, pero no la del tensor de Ricci, que es proporcional al gradiente del escalar de curvatura $\nabla_{b}R_{a}^{b} = \nabla_{a}R/2$. Esta condición nos lleva directamente a otra sobre el contenido material: que la traza del tensor de energía momento debe ser constante en todo el espaciotiempo. Para fluidos perfectos, esta condición solo se satisface si la ecuación de estado es $\rho - 3p =$ constante. Claramente, esta condición no es físicamente aceptable puesto que excluye contenidos materiales perfectamente válidos.

Este problema se puede solucionar restando al tensor de Ricci otro tensor construido a partir de él cuya divergencia sea la misma: $Rg_{ab}/2$. Evidentemente, obtenemos el tensor de Einstein que, como ya sabíamos, tiene divergencia nula. De hecho, el tensor de Einstein es el único tensor construido a partir de la métrica y de sus derivadas hasta segundo orden que es lineal en las segundas derivadas y que tiene divergencia nula. Este resultado es un corolario del teorema de Lovelock. En realidad, este teorema admite la posibilidad de añadir un término proporcional a la métrica Λg_{ab} sin alterar las propiedades mencionadas del tensor de Einstein. La constante de proporcionalidad Λ recibe el nombre de *constante cosmológica*. En este curso, consideraremos solo espaciotiempos sin constante cosmológica.

3.3.2. Ecuaciones dinámicas del campo gravitatorio

A los dos postulados que vimos en el tema dos, que hacían referencia a la naturaleza de los campos materiales (causalidad local y conservación local de la energía y del momento), podemos añadir el tercero que dicta las leyes dinámicas del campo gravitatorio. Los tres postulados definen la *teoría general de la relatividad*.

Postulado (iii) Ecuaciones de campo. Las ecuaciones de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi \mathrm{G} T_{ab}$$

se satisfacen en todo el espaciotiempo $\mathscr{M}$.

Si calculamos la traza de esta ecuación tensorial $-R = 8\pi \mathrm{G} T$ y sustituimos la curvatura escalar por su valor en términos del tensor de energía-momento, obtenemos otra expresión equivalente de las ecuaciones de Einstein:

$$R_{ab} = 8\pi \mathrm{G} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right).$$

Para establecer contacto con la mecánica newtoniana, notemos que la traza del tensor de energía-momento de un fluido perfecto de velocidad u^a es $T = -\rho + 3p \sim -\rho = -T_{ab} u^a u^b$ en el límite no relativista. Por tanto, la proyección de las ecuaciones de Einstein sobre la velocidad del flujo es

$$R_{ab} u^a u^b = 8\pi \mathrm{G} (T_{ab} u^a u^b + T/2) \sim 4\pi \mathrm{G} T_{ab} u^a u^b,$$

que es la expresión de la ley de la gravedad newtoniana, como hemos visto.

Las ecuaciones de Einstein determinan el tensor de Ricci en función de las fuentes. Aparentemente, el tensor de Weyl queda sin determinar. Sin embargo, la identidad de Bianchi nos permite escribir la divergencia del tensor de Weyl en términos del tensor de Ricci (ver § 1.3.2) y éste en términos del tensor de energía-momento mediante las ecuaciones de Einstein. Así obtenemos la ecuación

$$\nabla_a C_{bcd}{}^a = 8\pi \mathrm{G} \left(-\nabla_{[b} T_{c]d} + \frac{1}{3} \nabla_{[b} T g_{c]d} \right).$$

Las ecuaciones de Einstein en una base coordenada son un sistema de diez ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas y no lineales, aunque son lineales en las segundas derivadas de sus variables (las componentes de la métrica). Como veremos, en muchas situaciones de interés, son ecuaciones hiperbólicas de segundo orden con un problema de valores iniciales bien puesto.

Las ecuaciones de Einstein tienen aspectos similares en sus estructura a las

ecuaciones de Maxwell $\nabla_b F^{ab} = 4\pi j^a$ para el potencial vector A_a, en términos del cual el campo se escribe como $F_{ab} = 2\nabla_{[a} A_{b]}$. En efecto, las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales de segundo orden hiperbólicas para el potencial vector y la densidad de corriente j^a desempeña el mismo papel que el tensor de energía-momento T_{ab}. Sin embargo, también presentan diferencias importantes. Por un lado, las ecuaciones de Maxwell microscópicas son lineales (aunque no lo son en medios materiales). La diferencia más importante estriba una vez más en el hecho de que las ecuaciones de Einstein establecen una relación entre las fuentes y la propia estructura espaciotemporal. Las densidades de corriente que son las fuentes de las ecuaciones de Maxwell se pueden fijar y determinar a priori. Dadas estas fuentes, se puede encontrar el campo electromagnético generado por las mismas resolviendo las ecuaciones de Maxwell. En relatividad general, el tensor de energía-momento depende de la métrica y ésta depende a su vez, mediante las ecuaciones de Einstein, del tensor de energía-momento. Se hace por tanto necesario resolverlas simultáneamente para la métrica y para el contenido material.

Es importante notar que en las regiones espaciotemporales en las que no tenemos contenido energético, las zonas vacías, el tensor de Ricci se anula en virtud de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, la métrica no es necesariamente plana puesto que el tensor de Weyl puede no anularse (si bien su divergencia sí se anula en vacío). Esta situación es enteramente análoga a la del campo electromagnético que no se anula necesariamente en vacío y donde su comportamiento queda determinado por el empalme con las regiones en las que sí existen fuentes.

Las ecuaciones de Einstein establecen la igualdad entre el tensor de Einstein y el de energía-momento. Hemos utilizado la propiedad de que el segundo de ellos tiene divergencia nula para motivarlas. Por otro lado, las ecuaciones de movimiento del contenido material se pueden obtener a partir las ecuaciones de Einstein, puesto que estas últimas implican que el tensor de energía-momento tiene divergencia nula y, como ya vimos, se pueden deducir las ecuaciones de movimiento del contenido material a partir de esta ley de conservación. En particular, desde este punto de vista, la ley de movimiento geodésico de las partículas libres es consecuencia de las ecuaciones de Einstein.

ejercicio: Comprobar que las ecuaciones de Maxwell se pueden obtener a partir de la ley de conservación local de la energía y del momento excepto si los campos eléctrico y magnético son perpendiculares.

3.3.3. Principio variacional

Las ecuaciones de Einstein se pueden obtener mediante un principio variacional. En efecto, consideremos la *acción de Hilbert-Einstein*

$$S'_{\mathrm{G}} = \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} \int_{\mathscr{M}} R \mathrm{d}v = \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} \int_{\mathscr{M}} |g|^{1/2} R \mathrm{d}^4 x.$$

La acción total se puede escribir como la suma de ésta más la correspondiente a los campos materiales. Bajo una variación de la métrica δg_{ab}, la variación de la acción de Hilbert-Einstein es

$$\delta S'_{\mathrm{G}} = \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} \int_{\mathscr{M}} \delta(R \mathrm{d}v) = \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} \int_{\mathscr{M}} \delta R \mathrm{d}v + R \delta \mathrm{d}v$$

y, teniendo en cuenta que $R = R_{ab} g^{ab}$ y que $\delta \mathrm{d}v = -\frac{1}{2} g_{ab} \delta g^{ab} \mathrm{d}v$, obtenemos

$$\delta S'_{\mathrm{G}} = \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} \int_{\mathscr{M}} \left(\delta R_{ab} g^{ab} \mathrm{d}v + G_{ab} \delta g^{ab} \right) \mathrm{d}v.$$

El primer término se puede escribir como una divergencia y, por tanto, solo contribuye con un término de superficie. En efecto, en coordenadas normales x^μ, los símbolos de Christoffel se anulan y, por tanto, la traza de la variación del tensor de Ricci se reduce a $g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = 2 \nabla_{[\mu} (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha]\beta})$, que se anula si exigimos que $\delta\Gamma$ se anule en la frontera.

Notemos que la acción de Hilbert-Einstein contiene derivadas segundas y es, en este sentido, similar a la acción $S' = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t x \ddot{x}/2$ para la partícula libre cuya variación es

$$\delta S' = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \ddot{x} \delta x + [x^2 \delta(\dot{x}/x)/2]_{t_1}^{t_2}$$

y que es, por tanto, estacionaria bajo variaciones de la trayectoria tales que $\delta(\dot{x}/x)$ se anulen en los extremos si se satisface la ecuación de movimiento $\ddot{x} = 0$.

Nuestro interés es obtener las ecuaciones dinámicas a partir de la condición de estacionariedad de la acción bajo variaciones de la métrica que se anulen en la frontera, para lo que tendremos que añadir un término de superficie adecuado. La acción gravitatoria que consideraremos es

$$S_{\mathrm{G}} = \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} \int_{\mathscr{M}} R \mathrm{d}v + \frac{1}{8\pi \mathrm{G}} \int_{\partial\mathscr{M}} \tilde{K} \mathrm{d}\tilde{\sigma},$$

donde $\tilde{n}^a$ es la normal a la frontera, $\tilde{K}$ es la traza de la curvatura extrínseca de la frontera y $\mathrm{d}\tilde{\sigma}$ es su elemento de volumen (notemos que, en general, denotaremos con una tilde ˜ las cantidades que se refieran a la frontera $\partial\mathscr{M}$).

Como hemos visto, la variación del término de Hilbert-Einstein arroja el si-

guiente término de superficie a través del teorema de Gauss (ver § 1.4.3.3):

$$\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathscr{M}}\delta R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\mathrm{d}v=\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathscr{M}}\tilde{n}_{[\mu}g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\alpha]\beta}\mathrm{d}\tilde{\sigma}.$$

Si imponemos la condición de que δg_{ab} se anule en la frontera, este término se puede escribir de la forma (ejercicio)

$$-\frac{1}{8\pi G}\delta\int_{\partial\mathscr{M}}\tilde{K}\mathrm{d}\tilde{\sigma},$$

que se cancela, obviamente, con la variación del término de superficie con el que hemos corregido la acción de Hilbert-Einstein.

Por otro lado, la variación de la acción de los campos materiales es proporcional al tensor de energía-momento como ya vimos. Así, la variación de la acción total $S = S_{\mathrm{G}} + S_{\mathrm{M}}$ bajo variaciones de la métrica que se anulan en la frontera es

$$\delta S=\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathscr{M}}\left(G_{ab}-8\pi G T_{ab}\right)\delta g^{ab}\mathrm{d}v.$$

Si la variación de la acción se anula, recuperamos las ecuaciones de Einstein a partir de un principio variacional.

3.3.4. Ligaduras y ecuaciones dinámicas

En esta sección, calcularemos el número de grados de libertad del campo gravitatorio. Un análisis más detallado se llevará a cabo desde el punto de vista hamiltoniano. Antes de analizar el campo gravitatorio, estudiaremos los grados de libertad del campo electromagnético, que es bien conocido.

3.3.4.1. Campo electromagnético

1. Las ecuaciones de Maxwell en vacío son $\nabla_b(\nabla^a A^b - \nabla^b A^a) = 0$. Consideremos secciones espaciales planas y una base ortonormal adaptada $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{e}_i\}$ tal que $\boldsymbol{t}$ es perpendicular a las secciones espaciales.

2. La componente temporal de las ecuaciones de Maxwell, $\partial_i(\partial_0 A^i - \partial^i A^0) = 0$, no contiene segundas derivadas temporales y, por tanto, no es una ecuación dinámica. Es una ligadura que debe satisfacerse en todo instante y, en particular, en el instante inicial.

3. La componente temporal de las ecuaciones de Maxwell no contiene segundas derivadas temporales de A^0. Tampoco aparecen en las componentes

espaciales que son $\partial^i \partial_\mu A^\mu - \Box A^i = 0$. Por tanto, A^0 no es una variable dinámica.

4. Existe una libertad gauge (A_μ y $A_\mu + \partial_\mu f$ representan el mismo campo electromagnético) que se puede eliminar con una condición de fijación del gauge (por ejemplo, el gauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$).

5. El recuento de grados de libertad es el siguiente:

   - Tres variables de configuración A^i y sus tres velocidades.
   - Una ligadura y una condición gauge.
   - Quedan cuatro campos libres que corresponden a dos grados de libertad que evolucionan de acuerdo con tres ecuaciones dinámicas que preservan la ligadura (es decir, dos ecuaciones netas).

3.3.4.2. Campo gravitatorio

1. Dado un espaciotiempo, consideremos hipersuperficies espaciales cuya normal es $\boldsymbol{n}$ y cuya métrica inducida es $\boldsymbol{h}$.

2. Se puede ver a partir de las fórmulas de Gauss y de Gauss-Codazzi que $G_{ab} n^a n^b$ y $G_{ab} n^a h_c{}^b$ no contienen segundas derivadas en la dirección normal (EJERCICIO). Por tanto, las cuatro ecuaciones que se obtienen de contraer las ecuaciones de Einstein con n^a, es decir, las componentes normales $G_{ab} n^a = 0$, no son dinámicas. Son ligaduras que deben satisfacerse en toda sección espacial y, en particular, en la sección inicial.

3. Las componentes normales de las ecuaciones de Einstein no contienen segundas derivadas normales de n^a. Las componentes espaciales de las ecuaciones de Einstein $G_{ab} h_c{}^a h_d{}^b = 0$ solo contienen derivadas segundas normales de h_{ab}. Esto es completamente natural puesto que $\pounds_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{n} = 0$. Por tanto, las variables n^a no son dinámicas.

4. Existe una libertad en la elección de la métrica puesto que g_{ab} y $g_{ab} + 2\nabla_{(a}\xi_{b)}$ representan el mismo espaciotiempo. Esta libertad se puede eliminar con cuatro condiciones gauge (por ejemplo, el gauge armónico, también llamado gauge de de Donder, en el que se eligen coordenadas x^μ tales que $\partial_\mu(|g|^{1/2} g^{\mu\nu}) = 0$).

5. El recuento de grados de libertad es el siguiente:

   - Seis variables de configuración h_{ab} y sus seis derivadas normales $\pounds_{\boldsymbol{n}} h_{ab}$.
   - Cuatro ligaduras y cuatro condiciones gauge.

- Quedan cuatro campos libres que corresponden a dos grados de libertad que evolucionan de acuerdo con seis ecuaciones dinámicas (de segundo orden) que preservan cuatro ligaduras (es decir, dos ecuaciones netas).

3.4. Estrellas relativistas (esféricas y estáticas)

El modelo estelar que vamos a considerar consiste en una región espaciotemporal vacía (exterior de la estrella) y otra (interior) en la que existe un contenido material. La métrica espaciotemporal debe ser asintóticamente plana (ver § 4.1.2), es decir, suficientemente lejos de la estrella, debe convertirse en la métrica plana de Minkowski. Además, supondremos que la métrica en el interior es regular, es decir, todos los puntos del interior de la estrella pertenecen al espaciotiempo.

Conocidas las soluciones exterior e interior, necesitamos unas condiciones de frontera en la superficie de la estrella que permitan relacionar ambas soluciones. Estas condiciones son tales que las ecuaciones dinámicas estén bien definidas en todo el espaciotiempo y, en particular, en la superficie de la estrella. Sin embargo, no podemos conocer la posición de la superficie sin resolver el problema completo, lo que complica notablemente el problema. Si la estrella es estática, es posible identificar las condiciones de equilibrio y formular las condiciones de pegado. Para estrellas no estáticas (por ejemplo, con rotación o pulsantes) el problema está abierto.

3.4.1. Ecuaciones dinámicas

La métrica esféricamente simétrica y estática más general se puede escribir en las coordenadas adecuadas de la forma (ejercicio)

$$\mathrm{d}s^2 = -\alpha(r)\mathrm{d}t^2 + [1 - 2\mathrm{G}m(r)/r]^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2,$$

donde $\alpha(r)$ y $m(r)$ son funciones sin determinar, excepto por la condición $\alpha(r)[1 - 2\mathrm{G}m(r)/r] > 0$ que garantiza que la métrica tenga signatura lorentziana. De la expresión de esta métrica, vemos inmediatamente que $\boldsymbol{\xi} = \partial_t$ es un vector Killing temporal ortogonal a las hipersuperficies $t =$ constante si y solo si $\alpha > 0$ y $2\mathrm{G}m > r$.

Las componentes diagonales temporal y radial del tensor de Einstein para esta métrica son (ejercicio)

$$G_{tt} = \frac{2\mathrm{G}\alpha m'}{r^2}, \qquad G_{rr} = \frac{\alpha'}{r\alpha} - \frac{2\mathrm{G}m}{r^2(r - 2\mathrm{G}m)},$$

donde $f' \equiv \mathrm{d}f/\mathrm{d}r$. Las componentes no diagonales se anulan. Las componentes diagonales $G_{\theta\theta}$ y $G_{\phi\phi} = \operatorname{sen}^2\theta G_{\theta\theta}$ quedan completamente determinadas por la identidad de Bianchi y no son necesarias para este estudio.

Como contenido material consideraremos un fluido perfecto estático. Por ser estático, su velocidad de flujo u^a debe ser paralela al vector de Killing temporal ξ^a. Puesto que, en la base adaptada a este Killing que estamos utilizando $\xi_a\xi^a = g_{tt} = -\alpha$ y $u_a u^a = -1$, el campo de velocidades es $u^a = \alpha^{-1/2}\xi^a$, es decir, $u^0 = \alpha^{-1/2}$, $u^i = 0$. Entonces, las únicas componentes no nulas del tensor de energía momento son

$$T_{tt} = \alpha\rho, \qquad T_{rr} = (1 - 2\mathrm{G}m/r)^{-1}p, \qquad T_{\phi\phi} = \operatorname{sen}^2\theta T_{\theta\theta} = r^2\operatorname{sen}^2\theta p.$$

La ecuación de conservación del tensor de energía-momento $\nabla_b T^{ab} = 0$ tiene todas sus componentes idénticamente nulas excepto la radial:

$$(\rho + p)\alpha' = -2\alpha p'.$$

Esta ecuación nos dice cuál es el gradiente de presión necesario para compensar el campo gravitatorio y mantener así el fluido en un estado estático.

Las componentes diagonales temporal y radial de las ecuaciones de Einstein son

$$m' = 4\pi r^2\rho, \qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{2\mathrm{G}m + 8\pi\mathrm{G}r^3p}{r(r - 2\mathrm{G}m)}.$$

Notemos que estas dos ecuaciones, la ecuación de conservación del momento radial y la ecuación de estado, son cuatro ecuaciones para las cuatro funciones radiales α, m, p y ρ que tenemos que determinar. Las componentes angulares de las ecuaciones de Einstein no contienen información adicional.

Las condiciones de pegado en la superficie de la estrella, a cuyo radio llamaremos R, se pueden obtener integrando estas ecuaciones dinámicas en un entorno infinitesimal de la superficie:

$$p_+ - p_- = \mathscr{O}(\epsilon), \qquad m_+ - m_- = \mathscr{O}(\epsilon), \qquad \alpha_+ - \alpha_- = \mathscr{O}(\epsilon),$$

donde $f_\pm = f(R \pm \epsilon)$ con $\epsilon \geq 0$. Por tanto, las condiciones de pegado nos dicen que las funciones m, α y p deben ser continuas en la superficie de la estrella. En particular, la presión entre el exterior y el interior se debe equilibrar y, puesto que la presión en el exterior es cero, también debe serlo en la superficie. En otras palabras, el valor más pequeño del radio para el que la presión se anule señalará el límite de la estrella. La razón física para exigir que la presión sea continua es que, en caso contrario, tendríamos fuerzas infinitas debidas a gradientes infinitos de presión actuando sobre el fluido. Notemos que las condiciones de pegado no involucran la densidad, que puede ser discontinua en la superficie de la estrella.

3.4.2. Solución exterior

En el exterior de la estrella, la presión y la densidad se anulan, $p = \rho = 0$. Entonces, las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$m' = 0, \qquad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{2Gm}{r(r-2Gm)},$$

cuya única solución es $m = M$, donde M es una constante que llamaremos *masa de Schwarzschild* y $\alpha = 1 - 2GM/r$. Así, el espaciotiempo en el exterior de la estrella está descrito por la *métrica de Schwarzschild*

$$ds^2 = -(1-2GM/r)dt^2 + (1-2GM/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

La condición de estaticidad exige que cualquier punto del exterior debe tener una coordenada radial mayor que $2GM$ puesto que, en caso contrario, el vector de Killing $\boldsymbol{\xi} = \partial_t$ no sería de género tiempo en todo el espaciotiempo: $\boldsymbol{\xi}$ sería de género espacio para $r < 2GM$, si esto fuese posible. Esta métrica es asintóticamente plana, es decir, cuando $r \to \infty$ se convierte en la métrica plana de Minkowski.

Un estudio más general de la solución exterior nos permite abandonar el requisito de que la métrica sea estática ya que el siguiente teorema lo garantiza [3].

Teorema de Birkhoff: Cualquier solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en vacío es estática. Esta solución esféricamente simétrica es esencialmente única y está descrita por la familia uniparamétrica de métricas de Schwarzschild.

ejercicio: Demostrar el teorema de Birkhoff.

3.4.3. Solución interior

En el interior de la estrella, $\rho + p \neq 0$. Entonces la componente radial de la ecuación de conservación del tensor de energía-momento se puede combinar con la componente radial de las ecuaciones de Einstein y eliminar así la función α y su derivada α'. El resultado es la ecuación de Oppenheimer-Volkov,

$$r(r-2Gm)p' = -G(\rho+p)(m+4\pi r^3 p).$$

Por otro lado, la componente temporal de las ecuaciones de Einstein se puede integrar inmediatamente en términos de la densidad:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho + m(0),$$

donde $m(0)$ es una constante de integración que debe anularse para no tener una singularidad cónica, es decir, para que el área de una pequeña esfera centrada en el origen sea 4π veces el cuadrado del radio geodésico (EJERCICIO).

Haciendo uso de esta expresión y de la ecuación de estado, podemos integrar la ecuación de Oppenheimer-Volkov. La solución depende de un solo parámetro libre (además de los que contenga la ecuación de estado) por ser una ecuación diferencial ordinaria para la presión.

Las condiciones de pegado exigen que las funciones m y α en el interior satisfagan $m(R) = M$ y $\alpha(R) = 1 - 2GM/R$. Además, la presión se debe anular en la superficie de la estrella, es decir, $p(R) = 0$, lo que fija la constante de integración de la ecuación de Oppenheimer-Volkov.

Notemos que la masa de Schwarzschild M es igual a $M = 4\pi \int_0^R \mathrm{d}r r^2 \rho$, es decir, es la energía no gravitatoria contenida en la estrella. Sin embargo, esta expresión no es covariante puesto que, para calcularla, hemos utilizado el elemento de volumen coordenado y no el invariante $4\pi r^2(1 - 2Gm/r)^{-1/2}\mathrm{d}r$. En otras palabras, no hemos incluido la energía potencial gravitatoria en el cálculo. Es posible demostrar (ver §5.4) que la masa de Schwarzschild es igual a la energía total (ADM) de todo el espaciotiempo.

Vimos que $GM < R/2$ puesto que, en caso contrario, la métrica exterior no sería estática. Si suponemos que la densidad no es negativa en el interior, entonces es posible demostrar (usando las ecuaciones dinámicas y la condición de que $\alpha > 0$, también necesaria para que la métrica sea estática) que $GM < 4R/9$. También es posible demostrar que, si una cierta ecuación de estado es válida para densidades inferiores a una cierta densidad dada ρ_0, entonces existe un límite superior para la masa de Schwarzschild de la estrella (que depende de esta ecuación de estado y de ρ_0), independientemente de la ecuación de estado que gobierne el fluido para densidades superiores a ρ_0. Las demostraciones de estas afirmaciones, que constituyen el teorema de Buchdahl, se pueden encontrar, por ejemplo, en la referencia [2].

Nosotros consideraremos un caso especialmente simple que contiene suficiente información de interés y, además, da cuenta aproximada (de forma muy cruda) del comportamiento de una estrella de neutrones: el de un fluido perfecto con densidad uniforme, cuya ecuación de estado es $\rho(r) = \rho_0$, hasta un cierto radio R. Entonces, la función $m(r)$ tiene la forma $m(r) = 4\pi\rho_0 r^3/3$ en el interior y $m(r) = 4\pi\rho_0 R^3/3 = M$ en el exterior. La ecuación de Oppenheimer-Volkov se puede integrar exactamente y el resultado es

$$p(r) = \rho_0 \frac{(1 - 2GM/R)^{1/2} - (1 - 2GMr^2/R^3)^{1/2}}{(1 - 2GMr^2/R^3)^{1/2} - 3(1 - 2GM/R)^{1/2}} \qquad (r \leq R).$$

De esta expresión vemos que la presión central $p_c = p(0)$ se hace infinita para

valores de M tales que $3(1-2GM/R)^{1/2}=1$, es decir, para $GM=4R/9$. Equivalentemente, si sustituimos el radio de la estrella R por su valor en términos de su masa de Schwarzschild M y de su densidad ρ_0, concluimos que una estrella de densidad uniforme ρ_0 no puede tener una masa de Schwarzschild superior a

$$M_{\text{máx}}=\frac{4c^3}{9(3\pi G^3)^{1/2}}\rho_0^{-1/2}\sim 6{,}7\cdot 10^6 M_\odot\rho_0^{-1/2}\qquad\text{(unidades cgs)},$$

donde $M_\odot\sim 2\cdot 10^{33}\,\text{g}$ es la masa del Sol.

3.4.4. Límite newtoniano

En el límite newtoniano, la presión es mucho menor que la densidad, $p\ll\rho$, y la métrica es casi plana, es decir, $2Gm\ll r$. La ecuación de Oppenheimer-Volkov se convierte en $p'=-G\rho m/r^2$, cuya integral para estrellas de densidad uniforme es

$$p(r)=2\pi G\rho_0^2(R^2-r^2)/3\qquad(r\le R)$$

y la presión central $p_c=p(0)=2\pi G\rho_0^2R^2/3$. En el límite newtoniano, cualquier configuración de densidad y masa (o radio y masa) es posible con presiones suficientemente altas, en claro contraste con la situación relativista.

3.4.5. Colapso gravitatorio

Las estrellas de neutrones no pueden tener masas superiores a unas pocas masas solares (los cálculos con ecuaciones de estado más sofisticadas dan una cota de unas dos masas solares y, en cualquier caso, inferior a cinco). Podemos hacer una estimación del orden de magnitud de esta cota suponiendo que las estrellas de neutrones tienen densidad uniforme aproximadamente igual a la densidad nuclear, $\rho_0\sim 10^{14}\,\text{g/cm}^3$ (masa del neutrón: $1{,}6\times 10^{-24}\,\text{g}$; tamaño nuclear $\sim 10^{-13}\,\text{cm}$). El resultado de esta estimación es que la masa máxima de una estrella de neutrones estable es del orden de la masa solar. Por tanto, las estrellas esféricamente simétricas cuya masa es superior a unas pocas veces la del Sol, son incapaces de generar presiones que compensen el campo gravitatorio.

Para construir un modelo sencillo de colapso gravitatorio esféricamente simétrico consideraremos una bola de polvo, sin presión, que colapsa bajo su propio campo gravitatorio. La razón de ignorar la presión es que su único papel desde el punto de vista cualitativo es frenar y evitar el colapso para estrellas cuya masa está por debajo del límite de inestabilidad. Este modelo constituyó el primer modelo de colapso gravitatorio, propuesto por Oppenheimer y Snyder en 1939.

En ausencia de presión, las partículas de polvo de la superficie de la estrella seguirán geodésicas temporales de la métrica que, en esa superficie, es la métrica

de Schwarzschild, debido a las condiciones de pegado. Las geodésicas temporales en la dirección radial obedecen la ecuación

$$-1 = -(1 - 2GM/r)\dot{t}^2 + (1 - 2GM/r)^{-1}\dot{r}^2.$$

Por lo tanto, cuando la superficie de la estrella se acerca al *radio de Schwarzschild* $2GM$, la velocidad se comporta de la siguiente manera: $\dot{t} \to \infty$, $\dot{r} \to 0$ y $dr/dt \to 0$. Esto quiere decir que en las coordenadas t, r la estrella no alcanza nunca el radio de Schwarzschild. Sin embargo, el tiempo propio que necesita para alcanzar este radio es finito. En efecto, cerca de $2GM$, la velocidad radial se comporta como $\dot{r} \sim |1 - 2GM/r|^{1/2}$ de forma que

$$\tau = \int^{2GM} dr/\dot{r} \sim \int^{2GM} dr|1 - 2GM/r|^{-1/2} < \infty.$$

Además el tiempo propio para llegar desde $r = 2GM$ hasta $r = 0$ también es finito. Es posible hacer una estimación del tiempo propio de colapso que resulta ser de unos $10^{-5}M/M_\odot$ segundos.

El resultado final del colapso es, por tanto, la métrica de Schwarzschild para todo el rango de la coordenada radial. La métrica es singular en $r = 2GM$, aunque esta singularidad es solo aparente: representa simplemente el límite de validez de la carta utilizada. De hecho, cerca de este radio, la sección t, r de la métrica es igual a la métrica de Rindler (EJERCICIO).

La estructura global del espaciotiempo de Schwarzschild será analizada en detalle en §4.2.

3.5. Ejercicios

3.1 Demostrar que, si conocemos el cono nulo, podemos determinar el tensor métrico salvo un factor conforme.

3.2 Escribir las ecuaciones de movimiento, encontrar una acción y el tensor de energía momento para un campo escalar y para un campo electromagnético. Obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la conservación del tensor de energía-momento. Determinar las condiciones de energía que satisfacen estos campos.

3.3 Enunciar las condiciones de energía para un fluido perfecto en términos de la densidad y de la presión. Analizar la constante cosmológica desde este punto de vista.

3.4 Para ilustrar el arrastre de inerciales, consideremos el espaciotiempo determinado por la métrica en coordenadas esféricas

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \omega(r,\theta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2,$$

donde $\mathrm{d}\Omega_2^2$ es el elemento de línea de la esfera de radio unidad y ϕ el ángulo azimutal. Demostrar que cualquier partícula de momento angular nulo debe girar con velocidad angular $-\omega(r,\theta)/(2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)$.

3.5 Escribir el escalar de curvatura de un espaciotiempo que contiene un fluido perfecto.

3.6 Demostrar que, si describimos la radiación electromagnética como un fluido perfecto, entonces su ecuación de estado es $p = \rho/3$. Demostrar que este fluido, en equilibrio hidrostático, no puede tener una superficie libre (en la que la presión se anula).

3.7 Encontrar la métrica más general en el exterior de una distribución esférica estática de masa en presencia de una constante cosmológica. Enunciar y demostrar la generalización pertinente del teorema de Birkhoff.

3.8 Enunciar y demostrar la generalización pertinente del teorema de Birkhoff para las ecuaciones de Einstein acopladas a un campo electromagnético. Encontrar la solución esférica más general (métrica de Reissner-Nordström) e interpretar los dos parámetros independientes de la misma.

3.9 Encontrar una solución interior homogénea e isótropa para una estrella de polvo que colapsa y encontrar la correspondiente solución exterior (o viceversa).

3.10 Demostrar que $2\delta\int_{\mathscr{M}} R\mathrm{d}v = -\delta\int_{\partial\mathscr{M}} \tilde{K}\mathrm{d}\tilde{\sigma}$ bajo variaciones de la métrica que se anulen en la frontera.

Tema 4

Estructura global del espaciotiempo

4.1. Propiedades globales
- 4.1.1. Diagramas de Penrose
- 4.1.2. Planitud asintótica
- 4.1.3. Hiperbolicidad global
- 4.1.4. Horizontes de sucesos
- 4.1.5. Singularidades desnudas

4.2. El espaciotiempo de Schwarzschild
- 4.2.1. Singularidad desnuda para $M < 0$
- 4.2.2. Extensión analítica máxima
- 4.2.3. Diagrama de Penrose

4.3. El espaciotiempo de Kerr
- 4.3.1. Solución de Kerr con singularidad desnuda
- 4.3.2. Solución de Kerr no degenerada
  - 4.3.2.1. Diagramas de Penrose
  - 4.3.2.2. Inestabilidad de los horizontes de Cauchy
- 4.3.3. Solución extrema de Kerr
- 4.3.4. Ergosfera. Proceso de Penrose

4.4. Singularidades
- 4.4.1. Congruencias
  - 4.4.1.1. Congruencias de geodésicas temporales
  - 4.4.1.2. Congruencias de geodésicas nulas
  - 4.4.1.3. Superficies atrapadas
- 4.4.2. Teoremas de singularidad
- 4.4.3. Caracterización de las singularidades

4.5. Ejercicios

4.1. Propiedades globales

4.1.1. Diagramas de Penrose

El objetivo de los diagramas de Penrose es acercar gráficamente el infinito a una distancia finita, sin cambiar la estructura causal y de manera que los rayos de luz sean siempre rectas con pendiente de $\pm\pi/4$. Este último objetivo se consigue fácilmente mediante el uso de coordenadas nulas y el primero mediante una compactificación conforme.

Sean $\mathscr{M}$ y $\tilde{\mathscr{M}}$ dos espaciotiempos, $\varphi : \mathscr{M} \to \tilde{\mathscr{M}}$ un embebimiento y $\Omega : \tilde{\mathscr{M}} \to \mathbb{R}$ una función C^∞. Entonces, $\tilde{\mathscr{M}}$ es una *compactificación conforme* de $\mathscr{M}$ si y solo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. φ embebe $\mathscr{M}$ como una variedad diferenciable con frontera suave en $\tilde{\mathscr{M}}$.
2. La función Ω es positiva en $\varphi(\mathscr{M})$ y la métrica $\tilde{\boldsymbol{g}}$ en $\varphi(\mathscr{M})$ se obtiene a partir de la métrica $\boldsymbol{g}$ en $\mathscr{M}$ mediante la transformación conforme $\tilde{\boldsymbol{g}} = \Omega^2 \varphi_* \boldsymbol{g}$.
3. En la frontera suave de $\varphi(\mathscr{M})$ en $\tilde{\mathscr{M}}$ (que denotaremos $\tilde{\partial}\mathscr{M}$), la función Ω se anula, pero no su gradiente.

EJERCICIO: Demostrar que, si σ es el parámetro afín de una geodésica nula y $\tilde{\sigma}$ la de su imagen mediante una compactificación conforme, entonces la relación entre ambos parámetros es $\mathrm{d}\sigma = \Omega^{-2}\mathrm{d}\tilde{\sigma}$ y que, por tanto, se preserva la estructura causal.

Los diagramas de Penrose son bidimensionales y, por tanto, para poder representar geodésicas (por ejemplo, los rayos de luz) en los mismos, debemos asegurarnos de que la superficie representada sea *totalmente geodésica*, es decir, tal que si una geodésica es tangente a la (hiper)superficie en algún punto, entonces lo es en todos.

El espacio de Minkowski

Comenzamos con el elemento de línea del espaciotiempo de Minkowski en coordenadas esféricas

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}r'^2 + r'^2 \mathrm{d}\Omega_2^2.$$

Pasamos a coordenadas nulas radiales u', v' e introducimos $\tilde{u}, \tilde{v}$ mediante las siguientes transformaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \tan\tilde{u} = u' = t' - r', \\ \tan\tilde{v} = v' = t' + r', \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{c} -\infty < u' \leq v' < \infty, \\ -\pi/2 < \tilde{u} \leq \tilde{v} < \pi/2. \end{array}\right.$$

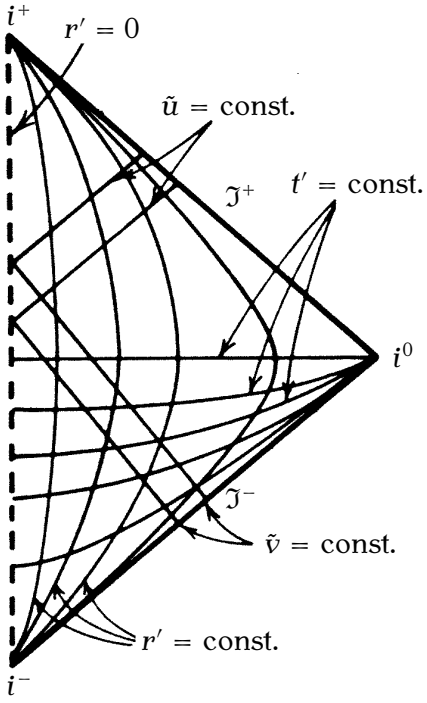


Figura 4.1: Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Minkowski.

El elemento de línea adquiere entonces la forma (EJERCICIO)

$$\mathrm{d}s^2 = \Omega^{-2}\mathrm{d}\tilde{s}^2, \qquad \Omega = 2\cos\tilde{u}\cos\tilde{v},$$

donde la nueva métrica conforme es

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{s}^2 &= -4\mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v} + \mathrm{sen}^2(\tilde{v}-\tilde{u})\mathrm{d}\Omega_2^2 \\ &= -\mathrm{d}\tilde{t}^2 + \mathrm{d}\tilde{r}^2 + \mathrm{sen}^2\,\tilde{r}\,\mathrm{d}\Omega_2^2,\end{aligned}$$

con $\tilde{t} = \tilde{v} + \tilde{u}, \quad \tilde{r} = \tilde{v} - \tilde{u}.$

La figura 4.1 representa el diagrama de Penrose del espaciotiempo $\tilde{\mathscr{M}}$ caracterizado por este elemento de línea, que es una compactificación conforme del espaciotiempo de Minkowski. Notemos que $\tilde{\mathscr{M}}$ incluye no solo el espacio de Minkowski conforme sino todos sus infinitos conformes. Cada punto define una 2–esfera, excepto i^0 e $i^\pm$ que son puntos.

- i^0 define el infinito espacial.
  Corresponde a $r' = \infty$, t' finito, $\quad \tilde{u} = -\pi/2,\ \tilde{v} = \pi/2.$
  Las geodésicas espaciales comienzan y terminan en i^0.

- $i^\pm$ son los infinitos pasado $(-)$ y futuro $(+)$ temporales.
  Corresponden a $t' = \pm\infty$, r' finito, $\quad \tilde{u} = \tilde{v} = \pm\pi/2.$

Las geodésicas temporales comienzan en i^- y terminan en i^+.

- $\mathcal{I}^\pm$ son los infinitos pasado $(-)$ y futuro $(+)$ nulos.
  Corresponden a $r' = \infty$, $t' = \pm\infty$ con $r' \mp t'$ finito.
  Las geodésicas nulas comienzan en $\mathcal{I}^-$ y terminan en $\mathcal{I}^+$.

EJERCICIO: Dibujar el diagrama Penrose del espaciotiempo bidimensional de Minkowski y del de Rindler.

4.1.2. Planitud asintótica

Los espaciotiempos asintóticamente planos son aquellos que tienen la misma estructura para $\mathcal{I}^\pm$ e i^0 que el espaciotiempo de Minkowski. Para formular esta afirmación de una manera más precisa, son necesarios algunos conceptos previos.

Un espaciotiempo $\mathscr{M}$ es *asintóticamente simple* si y solo si admite una compactificación conforme y todas las geodésicas nulas de $\mathscr{M}$ comienzan y terminan en su frontera suave $\tilde{\partial}\mathscr{M}$. Un espaciotiempo asintóticamente simple $\mathscr{M}$ es *asintóticamente vacío* si y solo si existe un abierto de su frontera $\tilde{\partial}\mathscr{M}$ en el que el tensor de Ricci se anula.

La frontera $\tilde{\partial}\mathscr{M}$ de un espaciotiempo asintóticamente simple $\mathscr{M}$ no puede incluir los puntos $i^\pm$ e i^0, puesto que no es suave en estos puntos. Por tanto, $\varphi(\mathscr{M}) \cup \tilde{\partial}\mathscr{M}$ no es el cierre topológico de $\varphi(\mathscr{M})$ en $\tilde{\mathscr{M}}$, sino que es una variedad diferenciable con frontera suave contenida en $\tilde{\mathscr{M}}$. La frontera $\tilde{\partial}\mathscr{M}$ representa el infinito en el sentido de que las geodésicas nulas empiezan y terminan en ella con valores infinitos de su parámetro afín puesto que $\Omega|_{\tilde{\partial}\mathscr{M}} = 0$.

Puede demostrase [3] que los espaciotiempos asintóticamente simples y vacíos tienen la misma estructura asintótica que el espaciotiempo de Minkowski:

- su frontera es nula y está compuesta por dos partes disjuntas $\mathcal{I}^\pm$, una en el futuro de $\varphi(\mathscr{M})$ y otra en el pasado;
- son globalmente hiperbólicos;
- su topología es la de $\mathbb{R}^4$ y la de sus fronteras $\mathcal{I}^\pm$ es $\mathbb{R} \times S^2$.

Esta definición, junto con la condición de que el espaciotiempo sea asintóticamente vacío, podría servir para describir espaciotiempos asintóticamente planos. Sin embargo, los espaciotiempos con agujeros negros no son asintóticamente simples ya que contienen geodésicas nulas que comienzan o terminan en singularidades que no pueden estar contenidas en la frontera suave del espaciotiempo.

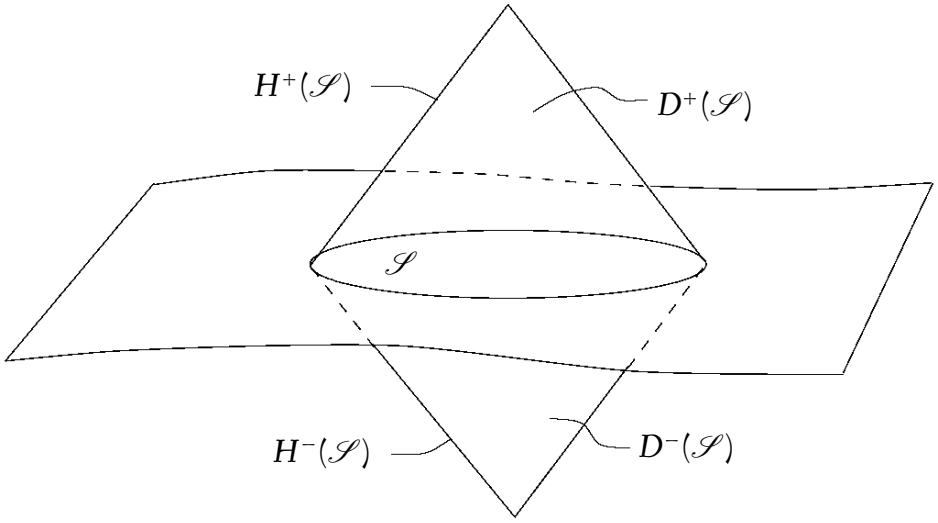


Figura 4.2: Dominios de dependencia y horizontes de Cauchy de una hipersuperficie ácrona.

Un espaciotiempo es *asintóticamente plano* si y solo si posee un abierto que es isométrico a un entorno abierto de la frontera de la compactificación conforme de algún espaciotiempo asintóticamente simple y el tensor de Ricci se anula en dicho entorno.

Los espaciotiempos asintóticamente planos admiten vectores que son asintóticos a los vectores de Killing del espacio de Minkowski en el infinito y permiten así introducir el concepto de *simetría asintótica*.

4.1.3. Hiperbolicidad global

Un conjunto espaciotemporal es *ácrono* si y solo si ningún par de puntos del mismo están unidos por curvas temporales, es decir, si y solo si ningún punto está en el *futuro cronológico* de otro punto.

Definimos el *dominio de dependencia* $D(\mathscr{S})$ de una hipersuperficie ácrona $\mathscr{S}$, como el conjunto de puntos tales que todas y cada una de las *curvas causales* (cuyo vector tangente es nulo o temporal) inextensibles que pasan por ellos intersecan a la hipersuperficie $\mathscr{S}$. El *horizonte de Cauchy* $H(\mathscr{S})$ de una hipersuperficie $\mathscr{S}$ es la frontera de su dominio de dependencia.

Un espaciotiempo es *globalmente hiperbólico* si y solo si existe una hipersuperficie ácrona Σ (llamada *superficie de Cauchy*) tal que su dominio de dependencia es todo el espaciotiempo $\mathscr{M}$, es decir, tal que $D(\Sigma) = \mathscr{M}$, por lo que $H(\Sigma) = \emptyset$.

Se puede demostrar [3] que una superficie de Cauchy Σ es una hipersuperficie ácrona que cumple una de estas dos propiedades:

- todas las curvas causales inextensibles la intersecan y atraviesan una y solo una vez.
- todas las geodésicas nulas inextensibles la intersecan y atraviesan una y solo una vez.

Una *función global de tiempo* es una función diferenciable t tal que su gradiente $t^a = g^{ab}\nabla_b t$ es un campo vectorial de género tiempo dirigido hacia el pasado. Puede parecer extraño que t^a deba estar dirigido hacia el pasado. Como ejemplo ilustrativo, consideremos la función global de tiempo $t(x) = x^0$ en el espaciotiempo de Minkowski; en este caso, $t^\mu = (-1, 0)$, que está claramente dirigido hacia el pasado.

No todos los espaciotiempos admiten una función global de tiempo. Sin embargo, es posible demostrar [3] que todo espaciotiempo globalmente hiperbólico $\mathscr{M}$ admite una función global de tiempo t tal que cada superficie Σ_t definida por t = constante es una superficie de Cauchy de género espacio. Por tanto, $\mathscr{M}$ puede foliarse mediante superficies de Cauchy espaciales y la topología de $\mathscr{M}$ es $\mathbb{R} \times \Sigma_t$.

Como consecuencia, todas las superficies de Cauchy de un espaciotiempo globalmente hiperbólico son homeomorfas. En efecto, por ser el espaciotiempo globalmente hiperbólico, existe una función global de tiempo t. Las órbitas de ∂_t son de género tiempo y, por tanto, cortan a todas las superficies de Cauchy una y solo una vez. Dadas dos superficies de Cauchy, la aplicación obtenida al asociar los puntos de intersección de las órbitas de ∂_t con cada una de ellas es biyectiva y continua (la inversa también es obviamente continua) y, por tanto, es un homeomorfismo.

Como resumen, en un espaciotiempo globalmente hiperbólico es posible determinar lo que ocurre en cualquiera de sus puntos a partir de condiciones iniciales en una de sus superficies de Cauchy. En otras palabras, las ecuaciones de movimiento tienen solución en todo el espaciotiempo y ésta es única si debe satisfacer condiciones iniciales en una superficie de Cauchy.

4.1.4. Horizontes de sucesos

Un espaciotiempo $\mathscr{M}$ asintóticamente plano es *fuertemente asintóticamente predecible* si y solo si el cierre topológico en su compactificación conforme $\tilde{\mathscr{M}}$ de la intersección de $\mathscr{M}$ con el pasado causal del infinito futuro nulo [denotado por $J^-(\mathfrak{I}^+)$] está contenido en un abierto globalmente hiperbólico de $\tilde{\mathscr{M}}$, es decir, si y

solo si $\overline{\mathscr{M} \cap J^-(\mathfrak{I}^+)}$ está contenido en un abierto de $\tilde{\mathscr{M}}$ que admite una superficie de Cauchy.

Sea $\mathscr{M}$ un espaciotiempo fuertemente asintóticamente predecible. Llamaremos *agujero negro* a la región $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}$, si existe, que no está contenida en el pasado causal del infinito futuro nulo $J^-(\mathfrak{I}^+)$, es decir, $\mathscr{B} = \mathscr{M} - J^-(\mathfrak{I}^+)$ y *horizonte de sucesos futuro* $\mathscr{H}^+$ a su frontera $\mathscr{H}^+ = \partial\mathscr{B} = \mathscr{M} \cap \partial J^-(\mathfrak{I}^+)$.

Un *horizonte de Killing* es una hipersuperficie que admite un vector de Killing normal nulo $\boldsymbol{\xi}$. Entonces, $\boldsymbol{\xi}$ es también tangente al horizonte de Killing y las curvas tangentes a $\boldsymbol{\xi}$ son geodésicas nulas (EJERCICIO) llamadas *generatrices*.

Es posible demostrar [2, 3] que $\mathscr{H}^+$ es un horizonte de Killing y que dos puntos —próximos o no— de $\mathscr{H}^+$ están unidos por geodésicas nulas. Más aún, las generatrices geodésicas de $\mathscr{H}^+$ pueden tener un comienzo pero no un final, es decir, las geodésicas nulas pueden entrar pero no salir de $\mathscr{H}^+$.

Todos los conceptos desarrollados en esta sección tienen su contrapartida obvia en el pasado: espaciotiempo fuertemente asintóticamente retrodecible, agujero blanco, horizonte de sucesos pasado, etc.

4.1.5. Singularidades desnudas

Un espaciotiempo asintóticamente plano posee una *singularidad desnuda* si y solo si no es fuertemente asintóticamente predecible.

Como veremos, esta definición no excluye la posibilidad de tener singularidades "iniciales" visibles. De hecho, esto es lo que ocurre en el espaciotiempo de Kruskal.

Conjetura de censura cósmica: Los procesos físicos aborrecen las singularidades desnudas estables y nosotros también (ver la referencia [2] para una formulación razonable; la que se da aquí, obviamente, no lo es, pero transmite la idea).

4.2. El espaciotiempo de Schwarzschild

Como vimos en § 3.4.2, de acuerdo con el teorema de Birkhoff, la métrica del espaciotiempo vacío esféricamente simétrico más general (métrica de Schwarzschild) depende de un solo parámetro y se puede escribir de la forma

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - 2GM/r)\mathrm{d}t^2 + (1 - 2GM/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2.$$

El teorema de Israel, que no demostraremos aquí, nos garantiza que un espaciotiempo vacío, asintóticamente plano, estático, que posee un horizonte de

sucesos futuro y que no es singular ni en él ni fuera de él, es esféricamente simétrico y está, por tanto, descrito por la métrica de Schwarzschild.

4.2.1. Singularidad desnuda para $M < 0$

Para obtener el diagrama de Penrose de este espaciotiempo, definamos la nueva variable radial $r^* = r - 2G|M|\log(1 + r/2G|M|) > 0$, que satisface $dr^* = (1 - 2GM/r)^{-1}dr$, e introduzcamos las coordenadas nulas

$$\left.\begin{array}{l}\tan\tilde{u} = u = t - r^*, \\ \tan\tilde{v} = v = t + r^*, \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} -\infty < u < v < \infty, \\ -\pi/2 < \tilde{u} < \tilde{v} < \pi/2. \end{array}\right.$$

El elemento de línea queda entonces (EJERCICIO)

$$ds^2 = \Omega^{-2}d\tilde{s}^2, \qquad \Omega = \frac{2\cos\tilde{u}\cos\tilde{v}}{\sqrt{1 + 2G|M|/r}}, \qquad d\tilde{s}^2 = -4d\tilde{u}d\tilde{v} + \frac{4r^2}{1 + 2G|M|/r}d\Omega_2^2,$$

donde $r = r(\tilde{u}, \tilde{v})$ está definido implícitamente por los cambios de coordenadas anteriores.

Estamos en la misma situación que en el espacio de Minkowski salvo por el factor singular $1 + 2G|M|/r$. Por tanto, el diagrama de Penrose de este espaciotiempo (figura 4.3) es igual al del espacio de Minkowski (figura 4.1) con la importante diferencia de que $r = 0$, que corresponde a $\tilde{u} = \tilde{v}$, es una singularidad de curvatura (el escalar $R_{bcd}R^{abcd}$ se hace infinito). El cierre de la intersección del pasado causal del infinito futuro nulo con todo el espaciotiempo $\overline{\mathscr{M} \cap J^-(\mathfrak{I}^+)}$ es todo el diagrama de Penrose. Esta región, no admite ninguna superficie de Cauchy. En efecto, cualquier superficie de Cauchy putativa que tomemos irá desde i^0 hasta la singularidad $r = 0$ (como las curvas t = constante en la figura 4.3) pero su dominio de dependencia solo cubrirá la región que está a la derecha de la curva $\tilde{u}$ = constante que pasa por la intersección de la superficie de Cauchy putativa con la singularidad. Por tanto, este espaciotiempo no es fuertemente asintóticamente predecible y $r = 0$ es una singularidad desnuda.

4.2.2. Extensión analítica máxima

A partir de ahora, consideraremos solo el caso $M > 0$. Entonces, el parámetro M se puede interpretar como la masa del agujero negro (ver § 5.4). Además, $r = 0$ es una singularidad de curvatura ya que, como en el caso anterior, el escalar $R_{bcd}R^{abcd}$ se hace infinito.

Consideremos la región $r > 2GM$. Definimos las *coordenadas nulas de*

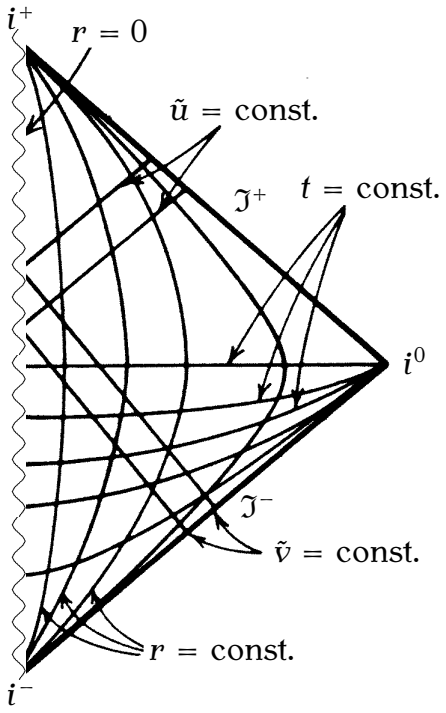


Figura 4.3: Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Schwarzschild con $M < 0$, que presenta una singularidad desnuda en $r = 0$.

Eddington-Finkelstein como

$$u = t - r^*, \qquad v = t + r^*, \qquad r^* = r + 2GM \log|1 - r/2GM|, \tag{4.1}$$

cuyo recorrido es $-\infty < u, v < +\infty$. Notemos que r^* es una coordenada tal que $\mathrm{d}r^* = (1 - 2GM/r)^{-1}\mathrm{d}r$.

Las curvas $\dot{u} = 0$ y $\dot{v} = 0$ son geodésicas radiales nulas cuyos parámetros afines alcanzan un valor finito en $r = 2GM$. Para verlo, consideremos, por ejemplo, la geodésica radial nula $\dot{v} = 0$. Esta geodésica está parametrizada afínmente por u en la métrica plana $-\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Por tanto, su parámetro afín λ en la métrica de Schwarzschild satisfará la ecuación $\mathrm{d}\lambda = (1 - 2GM/r)\mathrm{d}u$ como vimos en el ejercicio de § 4.1.1. Puesto que cerca de $r = 2GM$ se satisface $v - u = 2r^* \sim 4GM \log x$, donde $x = r/2GM - 1$ y v es constante, podemos escribir $1 - 2GM/r \sim x \sim e^{-u/4GM}$, por lo que la relación entre λ y u adquiere la forma $\mathrm{d}\lambda \sim e^{-u/4GM}\mathrm{d}u$, es decir, $\lambda \sim e^{-u/4GM}$. Así vemos que λ es finito cerca de $r = 2GM$ que corresponde a $u \to \infty$.

A la vista de estos resultados, introducimos las nuevas coordenadas, que reci-

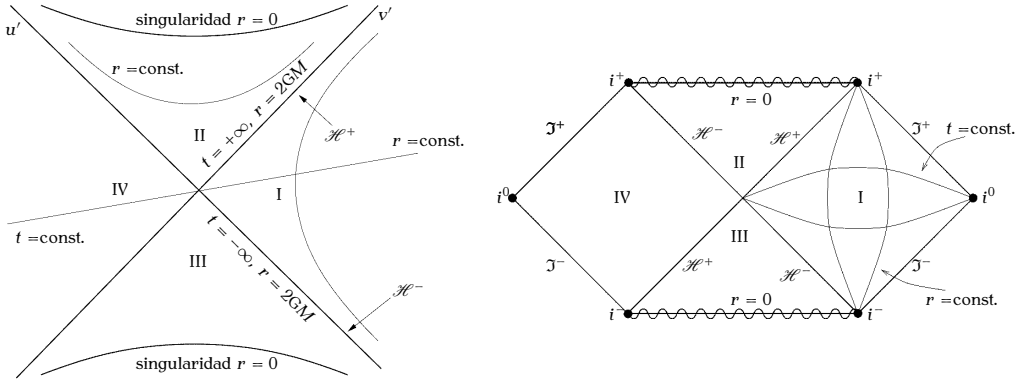


Figura 4.4: Diagrama de Kruskal y de Penrose del espaciotiempo de Schwarzschild.

ben el nombre de *coordenadas de Kruskal-Szeckeres*,

$$u' = -e^{-u/4GM}, \qquad v' = e^{v/4GM},$$

en términos de las cuales, la métrica se escribe de la forma (EJERCICIO)

$$ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r}e^{-r/2GM}du'dv' + r^2d\Omega_2^2,$$

donde r está definido implícitamente mediante $u'v' = (1 - r/2GM)e^{r/2GM}$.

El rango de las coordenadas u' y v' para la región exterior es $u' < 0$, $v' > 0$. Así, vemos que este espaciotiempo admite una extensión analítica puesto que las geodésicas parametrizadas por u' y v' terminan artificialmente sin agotar el recorrido de sus parámetros. Extendemos u' y v' desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Así, obtenemos la extensión de Kruskal, que es la única extensión analítica máxima del espaciotiempo de Schwarzschild (figura 4.4). Puesto que $r > 0$, vemos que u' y v' están restringidas por la condición $u'v' < 1$.

EJERCICIO: Comprobar que el vector de Killing ∂_t, que en el exterior (región I) es de género tiempo, en el interior (región II) es de género espacio. Asimismo, comprobar que, en esta región interior, $-\partial_r$ es un vector de género tiempo dirigido hacia el futuro.

4.2.3. Diagrama de Penrose

Introducimos las nuevas coordenadas definidas mediante la transformación

$$\tan\tilde{u} = u', \qquad \tan\tilde{v} = v', \qquad -\pi/2 < \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u} + \tilde{v} < \pi/2,$$

en términos de las cuales, el elemento de línea adquiere la forma (EJERCICIO)

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2, \qquad \Omega^2 = re^{r/2M}(\cos\tilde{u}\cos\tilde{v})^2/8M^3, \qquad d\tilde{s}^2 = -4d\tilde{u}d\tilde{v} + r^2\Omega^2 d\Omega_2^2.$$

La figura 4.4 muestra el diagrama de Penrose del espaciotiempo de Kruskal. Vemos que, como apuntábamos anteriormente, este espaciotiempo posee una singularidad visible, pero es una singularidad inicial que no afecta a la predictibilidad. En efecto, el espaciotiempo de Kruskal es globalmente hiperbólico (una superficie de Cauchy une i^0_{L} con i^0_{R}) y, además, es fuertemente asintóticamente predecible: el cierre de la intersección del espaciotiempo con el pasado causal del infinito futuro está formado por las regiones I, III y IV y esta región es globalmente hiperbólica. Por tanto, el espaciotiempo de Kruskal no posee singularidades desnudas.

La región II (correspondiente a $r < 2GM$) es un agujero negro, es decir, ninguna geodésica causal que llegue al infinito accesible para las geodésicas nulas se ha originado en esta región. Más precisamente, esta región espaciotemporal no está en el pasado causal del infinito nulo futuro. Por tanto, $r = 2GM$ es un *horizonte de sucesos*. Análogamente, la región III (también correspondiente a $r < 2GM$) es un agujero blanco.

4.3. El espaciotiempo de Kerr

El teorema de Carter-Robinson, que no demostraremos aquí, garantiza que cualquier espaciotiempo asintóticamente plano, estacionario, axisimétrico, solución de las ecuaciones de Einstein en vacío, que posee un horizonte de sucesos y que no es singular ni en él ni fuera de él pertenece a la familia biparamétrica de espaciotiempos de Kerr cuyas métricas tienen la forma (en las *coordenadas de Boyer-Lindquist*)

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{\Delta - a^2\operatorname{sen}^2\theta}{\Sigma}dt^2 - 2a\operatorname{sen}^2\theta\frac{2GMr}{\Sigma}dtd\phi \\ &+ \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\operatorname{sen}^2\theta}{\Sigma}\operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \end{aligned}$$

donde $a = J/M > 0$ siendo M y J los dos parámetros libres de la familia, que pueden interpretarse como la masa y el momento angular del espaciotiempo cuando $G^2M^2 > a^2$, $M > 0$ y

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \qquad \Delta = r^2 + a^2 - 2GMr.$$

Las coordenadas de Boyer-Lindquist son análogas a las de Schwarzschild para agujeros negros estáticos. Debe notarse que el caso $a < 0$ está contemplado en la

familia anterior pues lo podemos convertir en el caso $a > 0$ mediante el cambio de variables $t \to -t$ ó $\phi \to -\phi$.

Los espaciotiempos de Kerr tienen singularidades coordenadas en el eje de simetría ($\theta = 0$), análoga a la de las coordenadas esféricas, y en aquellos valores de r para los que $\Delta = 0$. Además, tienen singularidades de curvatura en los puntos para los que $\Sigma = 0$ (EJERCICIO). Su comportamiento es diferente en función de la relación entre la masa M y el momento angular J del espaciotiempo. Para su estudio, es necesario distinguir tres casos: $G^2M^2 < a^2$, $G^2M^2 > a^2$ y $G^2M^2 = a^2$.

4.3.1. Solución de Kerr con singularidad desnuda

Comencemos con el caso $G^2M^2 < a^2$. Entonces, Δ es siempre estrictamente positivo y las únicas singularidades (además de la singularidad coordenada $\theta = 0$) provienen de la anulación de Σ. Así, la única singularidad real corresponde a $r = 0$, $\theta = \pi/2$. Esta singularidad tiene estructura anular y es desnuda, como veremos a continuación.

Para ello, introducimos las coordenadas de Kerr-Schild

$$x + iy = (r + ia)\operatorname{sen}\theta \exp\left[i \int (\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}r a/\Delta)\right],$$

$$z = r\cos\theta, \qquad \bar{t} = \int [\mathrm{d}t + \mathrm{d}r(r^2 + a^2)/\Delta] - r,$$

en términos de las cuales la métrica de Kerr adquiere la forma

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\mathrm{d}\bar{t}^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &+ \frac{2GMr^3}{r^4 + a^2z^2}\left(\frac{r(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) - a(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)}{r^2 + a^2} + \frac{z\mathrm{d}z}{r} + \mathrm{d}\bar{t}\right)^2,\end{aligned}$$

donde r está definido implícitamente, salvo signo, por la expresión

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0.$$

Las superficies $r =$ constante son elipsoides confocales de semiejes iguales en las direcciones x e y. Cuando $r = 0$, los elipsoides degeneran en el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$. En efecto, en el límite $r \to 0$,

$$x^2 + y^2 \to a^2 - a^2z^2/r^2 = a^2\operatorname{sen}^2\theta \leq a^2.$$

La circunferencia frontera de este disco corresponde a $\theta = \pi/2$, que es, como hemos visto, una singularidad de curvatura. El interior del disco no es singular y, de hecho, podemos extender analíticamente el recorrido de r a valores ne-

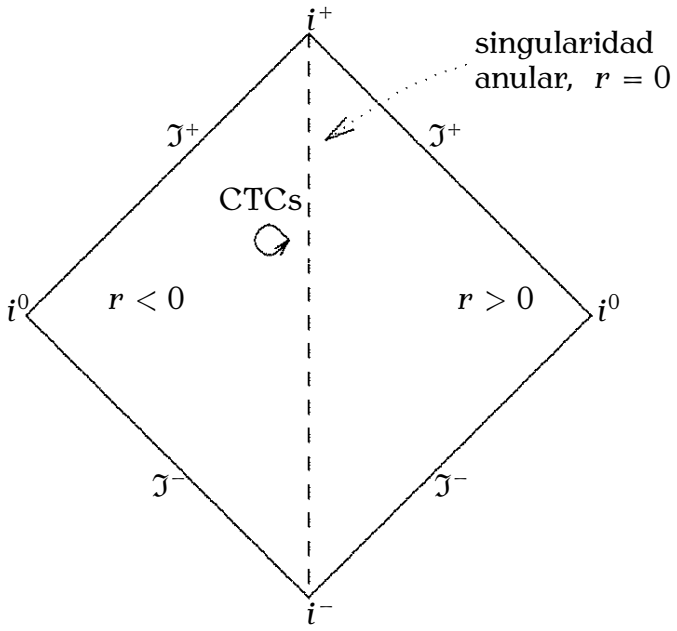


Figura 4.5: Diagrama de Penrose para la solución de Kerr con $M^2 < a^2$ para $\theta = 0, \pi/2$.

gativos a través el interior del disco ($r = 0$, $\theta \neq \pi/2$) y alcanzar así otra zona asintóticamente plana.

Las hipersuperficies $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ son *totalmente geodésicas*, es decir, que si una geodésica es tangente a las mismas en algún punto, lo es en todos (EJERCICIO). Por tanto, aunque en principio necesitaríamos "diagramas de Penrose tridimensionales" para representar este espaciotiempo, gracias a este resultado podemos dibujar diagramas de Penrose bidimensionales para estas hipersuperficies (figura 4.5).

Obtengamos el diagrama de Penrose para la sección $\theta = 0$. En el eje de simetría $\theta = 0$, la métrica de Kerr se reduce a

$$\mathrm{d}s^2 = -h(r)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2/h(r),$$

donde $h(r) = \Delta(r)/(r^2 + a^2)$. Introducimos la coordenada r^* mediante la relación $\mathrm{d}r^* = \mathrm{d}r/h(r)$. Notemos que $\mathrm{d}r^*/\mathrm{d}r$ es estrictamente positiva para todo valor de r (tanto positivo como negativo) ya que $h(r)$ lo es. Entonces, la métrica en el eje $\theta = 0$ queda

$$\mathrm{d}s^2 = h(r)(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^{*2}),$$

en principio con $r^* > 0$ (es decir, con $r > 0$). Sin embargo, podemos extender analíticamente este espaciotiempo a valores negativos de r y obtener así un es-

paciotiempo bidimensional conforme al de Minkowski con un factor conforme regular y estrictamente positivo. Por tanto, el diagrama de Penrose de la sección $\theta = 0$ será idéntico al del espacio de Minkowski bidimensional.

EJERCICIO: Obtener el diagrama de Penrose para la sección $\theta = \pi/2$.

Obviamente, la singularidad anular en $r = 0$ es una singularidad desnuda. Además, este espaciotiempo posee curvas cerradas temporales cerca de la singularidad. En efecto, suficientemente cerca de la singularidad, es decir, para $r = a\epsilon$, $\theta = \pi/2 + \epsilon$, la norma del Killing ∂_ϕ es

$$\partial_\phi^2 = g_{\phi\phi} = a^2 + \mathrm{G}Ma/\epsilon + \mathscr{O}(\epsilon).$$

Para valores $-1 \ll \epsilon \lesssim 0$, la norma de ∂_ϕ se hace negativa, es decir, el Killing ∂_ϕ es de género tiempo y, además, sus órbitas son cerradas.

EJERCICIO: Demostrar que las únicas geodésicas causales que alcanzan la singularidad desnuda se hallan en la parte de $r > 0$ del plano ecuatorial.

4.3.2. Solución de Kerr no degenerada

En el caso $\mathrm{G}^2M^2 > a^2$, la región del espaciotiempo definida por $r = 0$, $\theta = \pi/2$ también es una singularidad de curvatura con estructura anular. El procedimiento para verlo es idéntico al seguido en el caso anterior puesto que en las inmediaciones de esta región $r \sim 0$, $\theta \sim \pi/2$ la métrica tiene la misma estructura y podemos realizar el cambio a las coordenadas de Kerr-Schild de forma enteramente análoga. Además, posee singularidades coordenadas en valores del radio $r_\pm = \mathrm{G}M \pm \sqrt{\mathrm{G}^2M^2 - a^2}$, para los que $\Delta = 0$.

Es fácil ver (EJERCICIO) que las hipersuperficies definidas por $r = r_\pm$ son horizontes de Killing de los vectores de Killing

$$\boldsymbol{\chi}_\pm = \boldsymbol{\xi} + a/(2\mathrm{G}Mr_\pm)\boldsymbol{\psi},$$

donde $\boldsymbol{\xi} = \partial_t$ y $\boldsymbol{\psi} = \partial_\phi$ son los vectores de Killing que asintóticamente representan las traslaciones temporales y las rotaciones. Veremos además que $r = r_+$ es un horizonte de sucesos y $r = r_-$ es un horizonte de Cauchy.

El horizonte de sucesos gira con velocidad angular $\Omega_\mathrm{H} = a/(2\mathrm{G}Mr_+)$ con respecto a un sistema de referencia estacionario en i^0. En efecto, $r = r_+$ es un horizonte de Killing del vector de Killing $\boldsymbol{\chi}_+ = \boldsymbol{\xi} + \Omega_\mathrm{H}\boldsymbol{\psi}$. En las coordenadas adaptadas t, ϕ, vemos inmediatamente que $\chi_+^\mu \partial_\mu(\phi - \Omega_\mathrm{H} t) = 0$, es decir, que la cantidad $\phi - \Omega_\mathrm{H} t$ es constante sobre las órbitas de $\boldsymbol{\chi}_+$, que son las generatrices del horizonte. Por tanto, el horizonte gira con respecto a las órbitas de $\boldsymbol{\xi} = \partial_t$ con velocidad angular Ω_H. Además, es fácil ver (EJERCICIO) que los vectores de Killing $\boldsymbol{\chi}_+$ y $\boldsymbol{\xi}$ son perpendiculares en el horizonte.

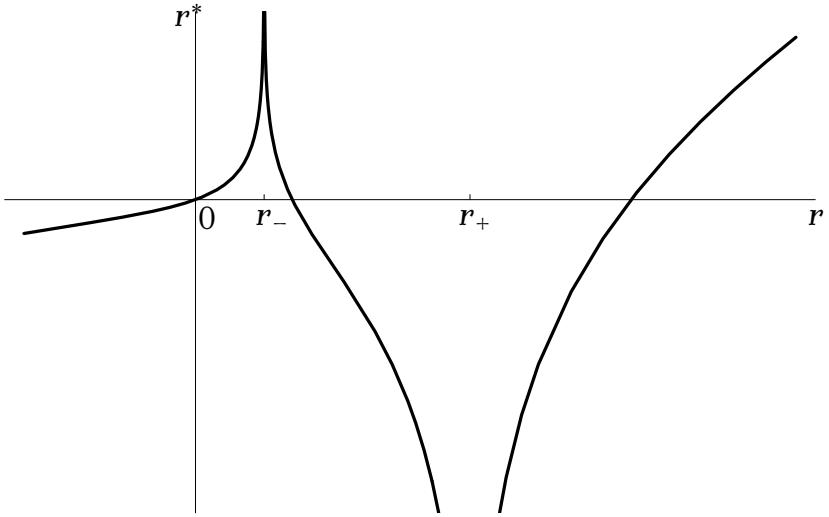


Figura 4.6: Función $r^*(r)$.

EJERCICIO: Estudiar la singularidad anular y la estructura causal de este espaciotiempo en las proximidades de dicha singularidad.

4.3.2.1. Diagramas de Penrose

Al igual que ocurre en el caso anterior, las secciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ son totalmente geodésicas.

Obtengamos el diagrama de Penrose para la sección $\theta = 0$, en la que la métrica de Kerr se reduce a

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + dr^2/h(r),$$

donde $h(r) = \Delta(r)/(r^2 + a^2)$. Notemos que los ceros $r_\pm$ de $\Delta(r)$ son también los únicos ceros de $h(r)$. Introduzcamos la coordenada radial r^* mediante la ecuación $dr^* = dr/h(r)$ cuya solución es

$$r^* = r + (2\kappa_+)^{-1} \log|1 - r/r_+| + (2\kappa_-)^{-1} \log|1 - r/r_-|,$$

donde $\kappa_\pm = (r_\pm - GM)/2GMr_\pm$ y satisfacen la relación $\kappa_+/\kappa_- = -r_-/r_+$. Además, $\kappa_- \leq 0 \leq \kappa_+$ y la igualdad se alcanza solo cuando $G^2M^2 = a^2$. En términos de esta coordenada r^*, la métrica de Kerr para $\theta = 0$ adquiere la forma

$$ds^2 = h(r)(-dt^2 + dr^{*2}).$$

La función $r^*(r)$ aparece representada en la figura 4.6.

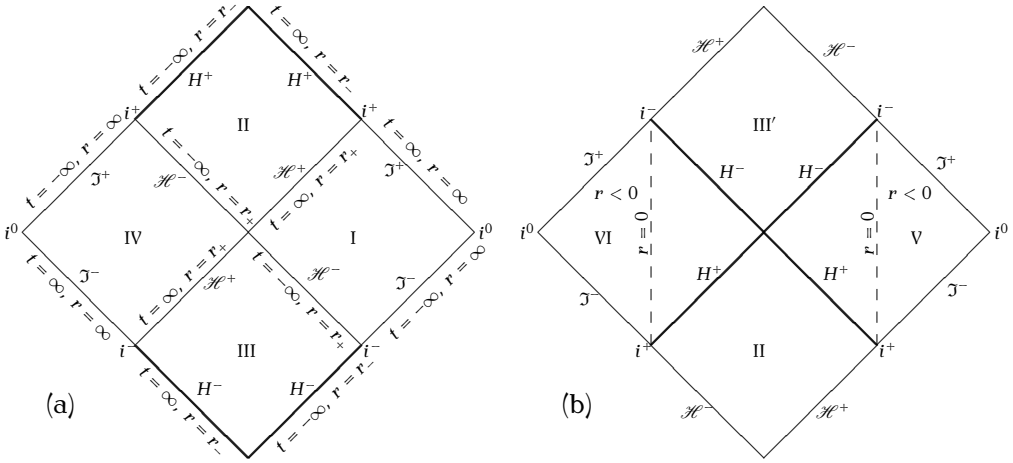


Figura 4.7: Diagramas de Penrose de la sección $\theta = 0$, para las regiones $r > r_-$ (figura a) y $r < r_+$ (figura b) del espaciotiempo de Kerr.

De manera enteramente análoga a la seguida en el espaciotiempo de Schwarzschild, comenzamos por la región $r > r_+$ e introducimos las coordenadas nulas

$$u = t - r^*, \qquad v = t + r^*,$$

cuyo recorrido es todo el plano $\mathbb{R}^2$. Las nuevas coordenadas

$$u' = -e^{-\kappa_+ u}, \qquad v' = e^{\kappa_+ v}, \tag{4.2}$$

cuyo rango en la zona $r > r_+$ es $u' < 0$, $v' > 0$, convierten la métrica en

$$ds^2 = -k(r)du'dv', \qquad k(r) \propto \frac{(r - r_-)^{1-\kappa_+/\kappa_-}}{r^2 + a^2} e^{-2\kappa_+ r},$$

donde r está definido implícitamente por

$$u'v' = -e^{2\kappa_+ r}(r/r_+ - 1)(r/r_- - 1)^{\kappa_+/\kappa_-}. \tag{4.3}$$

Esta métrica es regular en $r = r_+$ y podemos, por tanto, extender el recorrido de u' y v' a todo el plano. Según el signo de u' y v' en cada región de la figura 4.7a, tendremos que $u' = \pm e^{-\kappa_+ u}$, $v' = \pm e^{+\kappa_+ v}$. Esta extensión analítica cubre la región $r > r_-$ y su diagrama de Penrose se muestra en esta figura. Las regiones I y IV son completamente análogas a las regiones I y IV del espaciotiempo de Kruskal (figura 4.4). Las regiones interiores II y III están limitadas por los horizontes de sucesos $\mathscr{H}^\pm$ definidos por $r = r_+$ y por los de Cauchy $H^\pm$ definidos por $r = r_-$.

Podemos introducir cambios de coordenadas similares a los anteriores, defi-

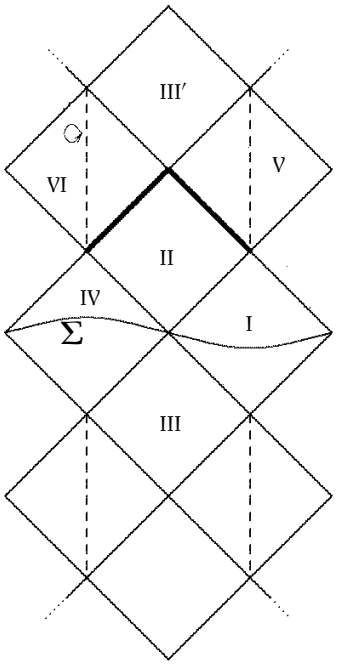


Figura 4.8: Diagrama de Penrose para la solución de Kerr no degenerada para $\theta = 0, \pi/2$.

nidos por

$$\bar{u}' = \pm e^{-\kappa_- u}, \qquad \bar{v}' = \pm e^{\kappa_- v},$$

que cubren la parte $-\infty < r < r_+$ y que solapan en la región II ($r_- < r < r_+$) con las coordenadas u', v'. El diagrama de Penrose de esta región está representado en la figura 4.7b.

Uniendo ambos diagramas por su región común (II), obtenemos el diagrama de Penrose de la sección $\theta = 0$ del espaciotiempo de Kerr. Es claro que este espaciotiempo es extensible analíticamente. Para obtener su extensión analítica máxima, basta darse cuenta que la región III y la III′ tienen las mismas características y que podemos tomar dos espaciotiempos de Kerr como el anterior, unirlos mediante la superposición de las regiones III de uno y III′ del otro y así sucesivamente para terminar obteniendo la figura 4.8.

EJERCICIO: Obtener el diagrama de Penrose de la sección $\theta = \pi/2$ de la extensión analítica máxima del espaciotiempo de Kerr.

4.3.2.2. Inestabilidad de los horizontes de Cauchy

Las hipersuperficies $H^{\pm}$ definidas por $r = r_-$ son horizontes de Cauchy. En el diagrama de Penrose de la figura 4.8, es evidente que el dominio de dependencia

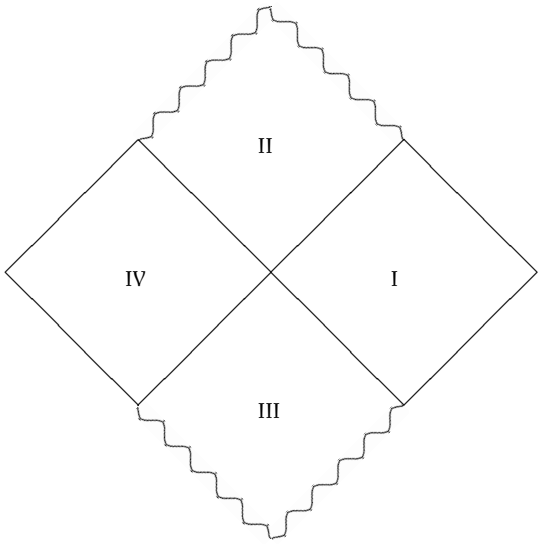


Figura 4.9: Posible estado final de la desestabilización del espaciotiempo de Kerr

$D(\Sigma)$ de la superficie de Cauchy (de la región $r > r_-$) Σ no cubre todo el espaciotiempo de Kerr ($r \in \mathbb{R}$) y que la frontera de dicho dominio de dependencia es $H^{\pm}$. En efecto, por los puntos de las regiones III', V y VI, pasan curvas causales que no cortan a Σ. Los horizontes de Cauchy marcan el límite de retro/predictibilidad a partir de los datos de cualquier superficie de Cauchy que pasa por las zonas externas I y IV. Sin embargo, como vamos a ver, estos horizontes no son estables, es decir, pequeñas perturbaciones hacen que se conviertan en singularidades de manera que, posiblemente, el diagrama de Penrose final (figura 4.9) se parezca a la del espaciotiempo de Kruskal excepto por la peculiaridad de que la singularidad es una hipersuperficie nula.

En términos de las coordenadas $\tilde{u}, \tilde{v}$ definidas por $u' = \tan \tilde{u}$, $v' = \tan \tilde{v}$, válidas en toda la región $r > r_-$, la métrica adquiere la forma

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2, \qquad \Omega^{-2} = k(r)/(\cos^2 \tilde{u} \cos^2 \tilde{v}).$$

Dado que $k(r) = h(r)/(u'v')$, vemos inmediatamente que el factor conforme se puede escribir como

$$\Omega^{-2} \propto \frac{h(r)}{\operatorname{sen} 2\tilde{u} \operatorname{sen} 2\tilde{v}}.$$

Consideremos dos geodésicas nulas cercanas caracterizadas por $\tilde{v}$ = constante y $\tilde{v} + d\tilde{v}$ = constante y que están cerca de $\tilde{v} = \pi/2$. La separación afín entre estas dos geodésicas nulas, es decir, la distancia entre ambas en términos

del parámetro afín de una geodésica nula que las corte, está dada por (EJERCICIO)

$$\mathrm{d}\lambda(\tilde{u}) = \Omega^{-2}(\tilde{u}, \tilde{v} \to \pi/2)\mathrm{d}\tilde{v},$$

donde $\tilde{u}$ determina el lugar en el que calculamos dicha distancia. Queremos comparar la distancia afín entre estas dos geodésicas nulas en la zona I ($\tilde{u} = \tilde{u}_{\mathrm{I}} < 0$) y en la zona II ($\tilde{u} = \tilde{u}_{\mathrm{II}} > 0$).

En la región I, $\tilde{v} \to \pi/2$ indica que las geodésicas están cerca de $\mathcal{I}^+$ y que, por tanto, $r \to \infty$. Teniendo en cuenta que $h(r) \to 1$ cuando $r \to \infty$, vemos que

$$\Omega^{-2}(\tilde{u}_{\mathrm{I}}, \tilde{v}) \sim 1/(\pi/2 - \tilde{v}) \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad \tilde{v} \to \pi/2.$$

Luego, en la región exterior I, la distancia afín entre dos geodésicas nulas entrantes se hace arbitrariamente grande cuando nos acercamos a $\mathcal{I}^+$ definido por $\tilde{v} = \pi/2$.

En la región II, $\tilde{v} \to \pi/2$ indica que las geodésicas están cerca del horizonte de Cauchy H^+ y que, por tanto, $r \to r_-$. Teniendo en cuenta que $h(r) \to r - r_- \to 0$ cuando $r \to r_-$, vemos que

$$\Omega^{-2}(\tilde{u}_{\mathrm{II}}, \tilde{v}) \sim \frac{r - r_-}{\operatorname{sen} 2\tilde{v}} \qquad \text{cuando} \qquad \tilde{v} \to \pi/2.$$

Para estudiar el comportamiento de este factor conforme, necesitamos escribir r en términos de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$. Para ello, notemos que

$$u'v' \sim (r - r_-)^{-r_-/r_+} \qquad \text{cuando} \qquad \tilde{v} \to \pi/2,$$

como es fácil ver a partir de la ecuación 4.3. Por tanto, $r - r_- \sim (u'v')^{-r_+/r_-}$ y el factor conforme se comporta de la siguiente forma cuando $\tilde{v} \to \pi/2$:

$$\Omega^{-2}(\tilde{u}_{\mathrm{II}}, \tilde{v}) \sim \frac{v'^{-r_+/r_-}}{\operatorname{sen}\tilde{v}\cos\tilde{v}} \sim \frac{(\tan\tilde{v})^{-r_+/r_-}}{\cos\tilde{v}} \sim (\cos\tilde{v})^{r_+/r_- - 1} \to 0.$$

Luego, en la región interior II, a diferencia de lo ocurre en el exterior, la distancia afín entre dos geodésicas nulas entrantes se hace arbitrariamente pequeña cuando nos acercamos al horizonte de Cauchy H^+ definido por $\tilde{v} = \pi/2$.

Así, hemos visto que distancias afines infinitas en las proximidades de $\mathcal{I}^+$ se convierten en distancias afines arbitrariamente pequeñas en H^+. Esto indica que una perturbación del baja energía en la región exterior sufrirá un desplazamiento al azul infinito en H^+, es decir, se convertirá en una perturbación de energía infinita. Cualquier pequeña perturbación desestabiliza el horizonte de Cauchy que se hace singular. Además, un observador que, partiendo de i^-, llegue a H^+ verá en un tiempo finito toda la historia infinita de la región exterior (ver figura 4.10).

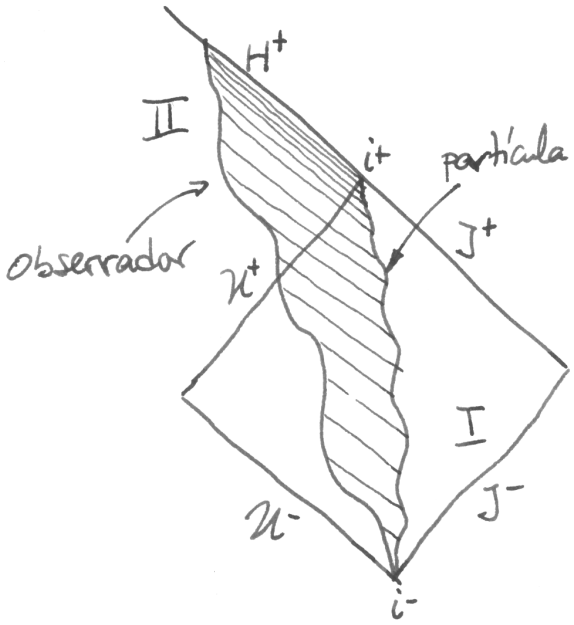


Figura 4.10: La historia infinita de una partícula que viaja desde i^- hasta i^+ es vista en tiempo finito por un observador que alcanza el horizonte de Cauchy H^+ debido a la acumulación de geodésicas nulas en las inmediaciones de éste.

4.3.3. Solución extrema de Kerr

En el caso : $\mathrm{G}^2M^2 = a^2$, $r_+ = r_-$ y tenemos un solo horizonte de Killing en $r = M$. El horizonte de Killing es tanto un horizonte de sucesos como de Cauchy. El vector de Killing asociado es $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\xi} + \Omega_{\mathrm{H}}\boldsymbol{\psi}$, con $\Omega_{\mathrm{H}} = a/2\mathrm{G}^2M^2$.

EJERCICIO: Estudiar este espaciotiempo y obtener su diagrama de Penrose (figura 4.11).

4.3.4. Ergosfera. Proceso de Penrose

Los agujeros negros de Kerr no degenerados ($\mathrm{G}M^2 > a^2$) nos proporcionan un ejemplo en el que el Killing $\boldsymbol{\xi}$ es de género tiempo en la zona asintótica pero no en otras regiones, incluso en el exterior del horizonte de sucesos. En efecto, la norma de $\boldsymbol{\xi}$ es

$$\boldsymbol{\xi}^2 = \partial_t^2 = g_{tt} = -1 + \frac{2\mathrm{G}Mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}.$$

La condición para que, fuera del horizonte de sucesos $r > r_+ = \mathrm{G}M + \sqrt{\mathrm{G}^2M^2 - a^2}$, el Killing $\boldsymbol{\xi}$ sea de género tiempo es

$$r > r_{\mathrm{e}}(\theta) = \mathrm{G}M + \sqrt{\mathrm{G}^2M^2 - a^2\cos^2\theta}.$$

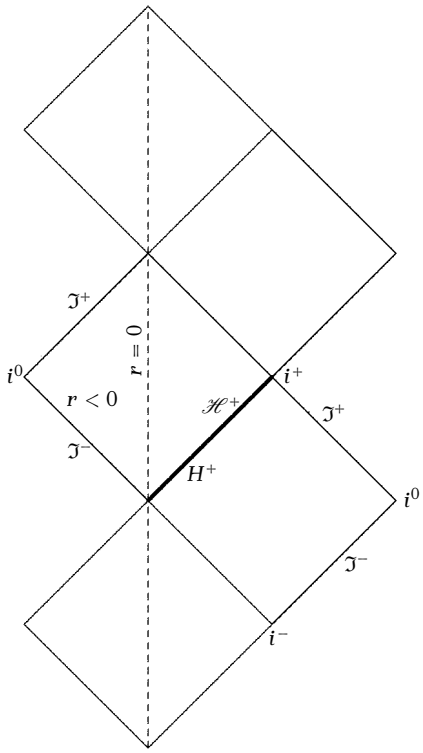


Figura 4.11: Diagrama de Penrose para la solución de Kerr degenerada para $\theta = 0, \pi/2$.

La superficie $r = r_e(\theta)$ es de género tiempo (excepto en los polos $\theta = 0, \pi$) y recibe el nombre *límite de estacionariedad*. Es la frontera de la región en la que las partículas que siguen curvas temporales pueden viajar en órbitas del Killing $\boldsymbol{\xi}$ y, por tanto, permanecer en reposo con respecto a la zona asintótica. En la región del interior del límite de estacionariedad (llamada *ergosfera*), $r_+ < r < r_e(\theta)$, el Killing $\boldsymbol{\xi}$ es de género espacio y cualquier partícula se ve forzada a rotar en el mismo sentido que el agujero negro (ver figura 4.12). En efecto, la velocidad $\dot{\boldsymbol{x}}$ de cualquier curva temporal tiene obviamente norma negativa, es decir,

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu < 0.$$

En la ergosfera, todas las componentes del tensor métrico, excepto $g_{t\phi}$ son positivas y todos los términos salvo $g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi}$ son positivos puesto que son de la forma $g_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}^2$. Por tanto, este término debe ser negativo, de forma que $\dot{t}\dot{\phi} > 0$. Finalmente, dividiendo por $\dot{t}^2$, obtenemos $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t > 0$.

Debe notarse que t es una función global de tiempo, aún en presencia de la ergosfera, puesto que $\partial^\mu t = g^{\mu t}$ es un vector de género tiempo ($\partial_\mu t\partial^\mu t = g^{tt} < 0$) dirigido hacia el pasado ($\partial^t t = g^{tt} < 0$) y, por tanto, $\dot{t} > 0$. Recordemos que

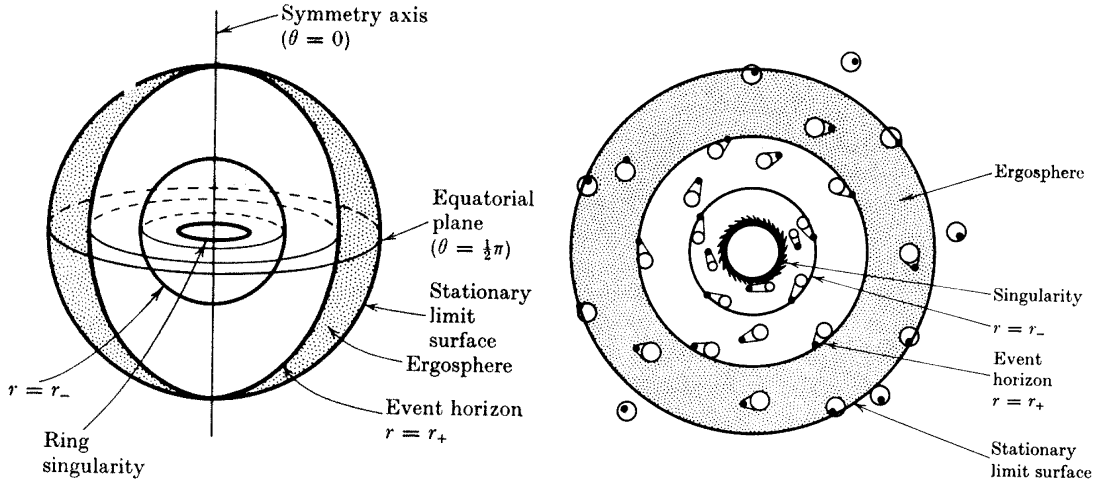


Figura 4.12: Corte axial y plano ecuatorial de un agujero negro de Kerr y la estructura de conos de luz.

$g^{tt} = \det(g_{ij})/\det(g_{\mu\nu})$ y puesto que $\det(g_{ij}) > 0$ y $\det(g_{\mu\nu}) < 0$, obtenemos que $g^{tt} < 0$.

Puesto que, en la ergosfera, el Killing $\boldsymbol{\xi}$ es de género espacio y el producto escalar de un vector de género espacio con otro de género tiempo no tiene signo definido, la energía $E = -p_a\xi^a$ (donde el cuadrimomento $\boldsymbol{p}$ es un vector de género tiempo), no es necesariamente positiva. Así, si una partícula de energía E_{in} se desintegra en la ergosfera en dos partículas de energías E_1 y E_2 tales que la partícula 1 adquiere energía negativa y cae al agujero negro y la 2 adquiere energía positiva y sale del mismo, la conservación local de energía requiere que $E_2 > E_{\text{in}}$, obteniendo una ganancia neta de energía a costa de la energía del agujero negro, por supuesto.

La cantidad de energía que se puede extraer de un agujero negro está limitada por la segunda ley de la mecánica de agujeros negros, según la cual el área de un agujero negro no puede decrecer (ver referencia [2]). El área del horizonte de un agujero negro de Kerr está dada por

$$A = \int_{r=r_+} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} = 16\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi\mathrm{G}^2\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2/\mathrm{G}^2}\right).$$

De esta ecuación, obtenemos la masa del agujero negro en función de su área y su momento angular:

$$M^2 = \frac{1}{16\pi\mathrm{G}^2}A + 4\pi\frac{J^2}{A}.$$

Si de un agujero negro inicial M_i, J_i, A_i extraemos energía mediante el proceso de Penrose hasta llegar a otro agujero negro de parámetros M_f, J_f, A_f, la variación

en su masa será

$$\Delta M = M_f - M_i = \sqrt{\frac{1}{16\pi G^2}A_f + 4\pi\frac{J_f^2}{A_f}} - \sqrt{\frac{1}{16\pi G^2}A_i + 4\pi\frac{J_i^2}{A_i}}$$
$$\geq \sqrt{\frac{1}{16\pi G^2}A_i} - \sqrt{\frac{1}{16\pi G^2}A_i + 4\pi\frac{J_i^2}{A_i}}.$$

La energía que obtenemos en el proceso será igual a la masa perdida por el agujero negro, es decir,

$$\Delta E \leq \sqrt{\frac{1}{16\pi G^2}A_i + 4\pi\frac{J_i^2}{A_i}} - \sqrt{\frac{1}{16\pi G^2}A_i}.$$

Esta cantidad será máxima para el máximo valor de J_i que es el de un agujero negro degenerado, para el que $a_i^2 = G^2M_i^2$, es decir, $J_i^2 = G^2M_i^4$, de forma que $A_i = 8\pi G^2M_i^2$. Así,

$$\Delta E/M_i \leq (1 - 1/\sqrt{2}) \sim 29\,\%.$$

El máximo rendimiento se obtiene eliminando todo el momento angular de un agujero negro degenerado, como hemos visto.

Existe un proceso análogo, descrito por medio de campos, en el que la energía entrante en forma de radiación es menor que la saliente a costa de disminuir el momento angular del agujero negro, llamado *superradiancia*.

4.4. Singularidades

4.4.1. Congruencias

Una *congruencia* en un abierto $\mathscr{V}$ es una familia de curvas tales que por cada punto de $\mathscr{V}$ pasa una y solo una curva de esa familia. Los vectores tangentes de una congruencia definen un campo vectorial en $\mathscr{V}$. Por otro lado, un campo vectorial en $\mathscr{V}$ define una congruencia. Diremos que una congruencia es de clase C^∞ si lo es su campo vectorial asociado.

4.4.1.1. Congruencias de geodésicas temporales

Sea u^a el vector tangente a una congruencia temporal. Aunque el tratamiento se puede hacer para congruencias temporales arbitrarias, nosotros nos centraremos en congruencias de geodésicas temporales, que contienen toda la información relevante para nuestros fines. Evidentemente, las líneas de flujo de un fluido en caída libre constituyen una congruencia de geodésicas temporales.

Consideremos la desviación geodésica z^a entre dos geodésicas próximas de la congruencia. Recordemos que la desviación $\boldsymbol{z}$ y el vector tangente $\boldsymbol{u}$ conmutan. Entonces, la velocidad de desviación a lo largo de la congruencia es

$$\dot{z}^a = u^b \nabla_b z^a = z^b \nabla_b u^a.$$

Además, podemos elegir esta desviación ortogonal al vector tangente, es decir, tal que $z^a u_a = 0$. La razón para hacer esta elección es doble. Por un lado, $z^a u_a$ es constante a lo largo de la cada geodésica de la congruencia, como es fácil de ver, y la contribución no perpendicular no aporta información. Por el otro, dos desviaciones geodésicas que se diferencian en un vector proporcional a u^a representan la desviación a la misma geodésica cercana.

Sea $h^a{}_b = \delta^a{}_b + u^a u_b$ el tensor de proyección en el subespacio tangente espacial ortogonal a la velocidad del flujo u^a.[1] Descompongamos el tensor $\nabla_b u^a$ de la siguiente manera:

- Vorticidad: $\omega_{ab} = \nabla_{[b} u_{a]}$.
  La vorticidad es, obviamente, un tensor antisimétrico.
- Expansión: $\theta = h^{ab} \nabla_{(b} u_{a)} = \nabla_a u^a$.
- Cizalladura: $\sigma_{ab} = \nabla_{(b} u_{a)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab}$.
  La cizalladura es un tensor simétrico y sin traza $h^{ab} \sigma_{ab} = 0$.

Notemos que estos tensores son puramente espaciales, es decir,

$$\omega_{ab} u^b = \sigma_{ab} u^b = 0,$$

como se ve fácilmente ya que $u_a \nabla_b u^a = \frac{1}{2} \nabla_b (u_a u^a) = 0$ y $u^b \nabla_b u^a = 0$ por ser una congruencia geodésica. Así, podemos escribir la derivada covariante de la velocidad de la congruencia en términos de estos tensores:

$$\nabla_b u_a = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab}.$$

Entonces, la velocidad de desviación a lo largo de la congruencia adquiere la forma

$$\dot{z}^a = u^b \nabla_b z^a = z^b \nabla_b u^a = (\omega^a{}_b + \sigma^a{}_b + \frac{1}{3} \theta h^a{}_b) z^b. \tag{4.4}$$

Los términos de vorticidad, cizalladura y expansión tienen la misma interpretación que en la dinámica de fluidos newtoniana. La vorticidad es un tensor antisimétrico y genera, por tanto, una rotación de la desviación geodésica dada

[1] Notemos que $\boldsymbol{h}$ no es la métrica inducida de ninguna hipersuperficie, de momento.

por $\dot{z}^a = \omega^a{}_b z^b$ que, obviamente, preserva su norma. La cizalladura es un tensor simétrico y sin traza y, en consecuencia, deforma una congruencia inicialmente esférica (por ejemplo, un volumen espacial esférico relleno de partículas de prueba) en un elipsoide cuyos ejes principales están dados por los autovectores de $\sigma^a{}_b$ a una velocidad dada por sus autovalores. Finalmente, la expansión es un escalar que da cuenta de la variación de volumen en la evolución de la congruencia. En efecto, si escogemos una base ortogonal perpendicular a las líneas de flujo, un elemento de volumen infinitesimal es $\delta V = \delta^3 z = \delta z^1 \delta z^2 \delta z^3$. Escojamos la base tal que sus elementos coincidan con las direcciones principales del tensor de cizalladura. Entonces, es fácil ver que $\delta \dot{V} = \theta \delta V$. Esta ecuación es válida en cualquier base puesto que tiene carácter tensorial y es válida en una base particular.

Es posible obtener las ecuaciones de evolución de la vorticidad, la cizalladura y la expansión a partir de la ecuación de desviación geodésica simplemente comparando la aceleración de la desviación $\ddot{z}^a$ obtenida a partir de esta expresión con la escrita en términos del tensor de Riemann. Sin embargo, no seguiremos este camino sino que procederemos directamente. Para ello, calculemos la ecuación de evolución de $\nabla_b u_a$ a lo largo de la congruencia:

$$\begin{aligned}(\nabla_b u_a)^{\cdot} &= u^c \nabla_c \nabla_b u_a = u^c \nabla_b \nabla_c u_a + R_{cba}{}^d u^c u_d \\ &= \nabla_b (u^c \nabla_c u_a) - \nabla_b u^c \nabla_c u_a + R_{cba}{}^d u^c u_d \end{aligned} \tag{4.5}$$

El primer término se anula por tratarse de una congruencia geodésica y el segundo se puede escribir en términos de la vorticidad, de la cizalladura y de la expansión, como hemos visto. Por tanto, a partir de esta expresión, podemos encontrar la ecuación de evolución de estas magnitudes.

La ecuación de evolución de la expansión se obtiene calculando la traza de la ecuación 4.5:

$$\dot{\theta} = u^c \nabla_c \theta = u^c \nabla_c \nabla_a u^a = -\nabla_a u^c \nabla_c u^a - R_{ac} u^a u^c .$$

El primer término se puede escribir en términos de θ, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ teniendo en cuenta las propiedades de los tensores involucrados. El resultado, tras algunas manipulaciones, es la *ecuación de Raychaudhuri*:

$$\dot{\theta} = \omega_{ab}\omega^{ab} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{1}{3}\theta^2 - R_{ab}u^a u^b .$$

La ecuación de evolución de la vorticidad se obtiene antisimetrizando la ecuación 4.5:

$$\dot{\omega}_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} - 2\sigma_{c[b}\omega_{a]}{}^c .$$

Por último, la ecuación de evolución de la cizalladura se obtiene eliminando

la traza de la parte simétrica de la ecuación 4.5:

$$\dot{\sigma}_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma_a{}^c\sigma_{cb} - \omega_{ac}\omega^c{}_b + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd}) + C_{cbad}u^c u^d + \frac{1}{2}\left(h_{ac}h_{bd}R^{cd} - \frac{1}{3}h_{ab}h_{cd}R^{cd}\right).$$

EJERCICIO: Deducir estas tres ecuaciones.

La ecuación de Raychaudhuri tiene una contribución directa de la curvatura espaciotemporal a través del tensor de Ricci. Si se satisface la condición temporal de convergencia (equivalente, a través de las ecuaciones de Einstein a la condición fuerte de energía), entonces $-R_{ab}u^a u^b \leq 0$. Este término producirá contracción y puede interpretarse en términos del carácter atractivo de la gravedad. La curvatura de Weyl contribuye indirectamente a través de la cizalladura y esta última contribuye negativamente al ritmo de expansión, es decir, produce contracción. La vorticidad, en cambio, contribuye positivamente al ritmo de expansión (como las fuerzas centrífugas). Por último, la propia expansión contribuye negativamente con el término $-\theta^2/3$. Esto es razonable puesto que, en caso contrario, tendríamos un proceso de expansión autoamplificado. Notemos que la ecuación de la vorticidad es la única que no depende explícitamente de la curvatura.

Si el vector tangente a la congruencia $\boldsymbol{u} = \partial_\tau$ es ortogonal a las hipersuperficies de τ constante, la vorticidad se anula. En efecto, vimos en el ejercicio 1.6 que si un vector $\boldsymbol{u}$ es ortogonal a una hipersuperficie, entonces $u_{[a}\nabla_b u_{c]} = 0$. El teorema de Frobenius garantiza la afirmación complementaria, es decir, que un vector $\boldsymbol{u}$ es ortogonal a una hipersuperficie si y solo si $u_{[a}\nabla_b u_{c]} = 0$ (ver, por ejemplo, referencia [2]). Pero, puesto que en este caso $u_a = \partial_a\tau$, la condición del teorema de Frobenius se reduce a que $\nabla_{[b}u_{a]} = \omega_{ab} = 0$. Además, si la vorticidad se anula en algún momento, se anula en todos, como se puede ver a partir de su ecuación de evolución. En este caso, vemos que la curvatura extrínseca de la hipersuperficie ortogonal a la congruencia es $K_{ab} = \nabla_b u_a$, si el vector tangente $\boldsymbol{u}$ está normalizado. Entonces, la traza de la curvatura extrínseca en precisamente la expansión de la congruencia $K = \theta$.

Supongamos que una congruencia de geodésicas temporales es ortogonal a una hipersuperficie y que se satisface la condición temporal de convergencia. Entonces,

$$\dot{\theta} + \theta^2/3 \leq 0, \qquad \theta^{-1} \geq \theta_0^{-1} + \tau/3,$$

donde θ_0 es la expansión inicial de la congruencia. Si este valor inicial de la expansión es negativo $\theta_0 < 0$, entonces $\theta \to -\infty$ en un tiempo propio $\tau \leq 3/|\theta_0|$ finito. Bajo estas condiciones, la congruencia se hace singular. En otras palabras si la congruencia es convergente, entonces aparecen cáusticas. Si $\theta_0 > 0$,

entonces existe un tiempo propio finito en el pasado $\tau \geq -3/\theta_0$ en el que la expansión fue infinita. En otras palabras, si la congruencia es divergente, entonces en algún punto del pasado la congruencia tuvo cáusticas. Estas singularidades de las congruencias no implican que el espaciotiempo sea singular. Sin embargo, algunas condiciones globales sobre el espaciotiempo pueden hacer que todas las congruencias desarrollen singularidades, como demuestran los teoremas de singularidad.

4.4.1.2. Congruencias de geodésicas nulas

Las congruencias de geodésicas nulas admiten un tratamiento similar, aunque más complicado. La diferencia principal estriba en que el conjunto de vectores ortogonales a su vector tangente k^a es bidimensional, de acuerdo con el siguiente argumento. Cualquier vector de desviación satisface que $z_a k^a$ es constante a lo largo de cada geodésica; por tanto, z^a se puede descomponer en una parte perpendicular y otra no perpendicular que no aporta información adicional. Podemos elegir $z^a k_a = 0$ con una "fijación de gauge". Además, puesto que k^a es ortogonal a sí mismo, si z^a es ortogonal a k^a también lo será si le añadimos un vector proporcional a k^a. Por tanto, solo nos interesan las clases de equivalencia de vectores de desviación que se diferencien en un vector proporcional a k^a. Así, tenemos dos condiciones diferentes y no una, como ocurría en el caso de las congruencias temporales. Por tanto, para congruencias de geodésicas nulas, $h^a{}_b$ proyecta sobre el espacio bidimensional de estas clases de equivalencia de vectores ortogonales a la congruencia.

Teniendo en cuenta que $\nabla_b k^a$ también está definido en términos de estas clases de equivalencia, podemos escribir

$$\nabla_b k_a = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{2}\theta h_{ab}.$$

La desviación geodésica satisface la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}z^a}{\mathrm{d}\lambda} = (\omega^a{}_b + \sigma^a{}_b + \frac{1}{2}\theta h^a{}_b)z^b,$$

donde λ es el parámetro afín de la congruencia. Por tanto, el elemento de área δa de una sección de la congruencia se ve afectado solo por la expansión (el argumento es enteramente análogo al de la sección anterior para el elemento de volumen):

$$\frac{\mathrm{d}\delta a}{\mathrm{d}\lambda} = \theta \delta a.$$

La ecuación de evolución de la expansión que es también enteramente análoga a la ecuación de Raychaudhuri, salvo por un factor numérico debido a la

dimensión, como ocurre en las expresiones anteriores:

$$\dot{\theta} = \omega_{ab}\omega^{ab} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{1}{2}\theta^2 - R_{ab}k^a k^b.$$

Como ocurre con las congruencias temporales, las congruencias nulas también pueden presentar singularidades. De hecho, si se satisface la condición nula de convergencia, la expansión de las congruencias de geodésicas nulas ortogonales a una hipersuperficie es tal que

$$\dot{\theta} + \theta^2/2 \leq 0, \qquad \theta^{-1} \geq \theta_0^{-1} + \lambda/2,$$

donde θ_0 es la expansión inicial de la congruencia. Si este valor es negativo, entonces $\theta \to -\infty$ para un valor $\lambda \leq 2/|\theta_0|$ finito de su parámetro afín.

4.4.1.3. Superficies atrapadas

Toda superficie espacial bidimensional orientable posee dos vectores nulos ortogonales a ella dirigidos hacia el futuro (EJERCICIO) que definen dos familias de geodésicas nulas que llamaremos saliente y entrante. Estas familias no cubren un volumen espaciotemporal sino una hipersuperficie nula. Sin embargo, tienen las mismas propiedades que las congruencias nulas y las trataremos como tales.

Llamaremos *superficie atrapada* a una superficie espacial compacta tal que sus dos congruencias de geodésicas nulas ortogonales entrantes y salientes tienen expansión negativa.

4.4.2. Teoremas de singularidad

Existen varios teoremas de singularidad formulados casi en su totalidad por Hawking y/o Penrose. Nosotros nos centraremos en dos de ellos.

El primero que vamos a considerar fue formulado y demostrado por Hawking y Penrose en 1970 y es, probablemente, el más útil y general. Para la demostración de este teorema, además de un estudio detallado de la estructura causal del espaciotiempo [2, 3] que no llevaremos a cabo aquí, es necesario introducir el concepto de puntos conjugados de una geodésica. Dos puntos de una geodésica son *conjugados* si y solo si la ecuación de desviación geodésica tiene una solución no nula que se anula en esos dos puntos. Cualitativamente, dos puntos de una geodésica son conjugados si y solo si existe otra geodésica infinitesimalmente próxima que corta a la primera en esos puntos. Este teorema contiene entre sus hipótesis las *condiciones genéricas temporal y nula*: toda geodésica temporal, respectivamente nula, posee al menos un punto en el que $R_{abcd}u^a u^d \neq 0$, respectivamente $k_{[e}R_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^d \neq 0$. Estas dos condiciones se satisfacen en la mayoría de los

espaciotiempos, con la excepción de aquellos que son artificialmente patológicos y no insistiremos más en ellas.

Teorema: Un espaciotiempo no puede ser geodésicamente completo, es decir, debe tener alguna geodésica nula o temporal que no agota el recorrido de su parámetro afín, si se cumplen las siguientes condiciones:

- La condición temporal de convergencia y, por tanto, también la nula.
- La condición genérica temporal y nula.
- No existen curvas temporales cerradas.
- El espaciotiempo contiene alguno de los siguientes elementos:
  - Un conjunto compacto ácrono sin frontera, lo que significa que el universo es cerrado.
  - Una superficie atrapada.
  - Un punto tal que la expansión de todas las geodésicas nulas que pasan por él se hace negativa a largo de las mismas.

Otro teorema de interés específico para el colapso gravitatorio es el debido a Penrose en 1965, que fue históricamente el primer teorema de singularidad.

Teorema: Un espaciotiempo no puede ser geodésicamente completo si se cumplen las siguientes condiciones:

- La condición nula de convergencia.
- Es globalmente hiperbólico.
- Admite una superficie de Cauchy no compacta.
- Tiene una superficie atrapada.

Más aún, bajo estas condiciones, al menos una geodésica nula, inextensible, dirigida hacia el futuro y ortogonal a la superficie atrapada tiene un longitud afín inferior a $2/|\theta_0|$, donde $\theta_0 < 0$ es el mayor valor (menor en módulo) de la expansión de las geodésicas nulas entrantes y salientes en la superficie atrapada.

Demostración. Para demostrarlo, aceptaremos las hipótesis del teorema y su antítesis, es decir, que todas las geodésicas nulas son completas y que, en particular, las ortogonales a la superficie atrapada tienen longitud afín mayor o igual que $2/|\theta_0|$.

Consideremos los dos subconjuntos de puntos que están a una distancia afín menor o igual a $2/|\theta_0|$ a lo largo de las geodésicas nulas salientes y entrantes perpendiculares a la superficie atrapada $\mathscr{T}$. Cada uno de estos conjuntos es compacto

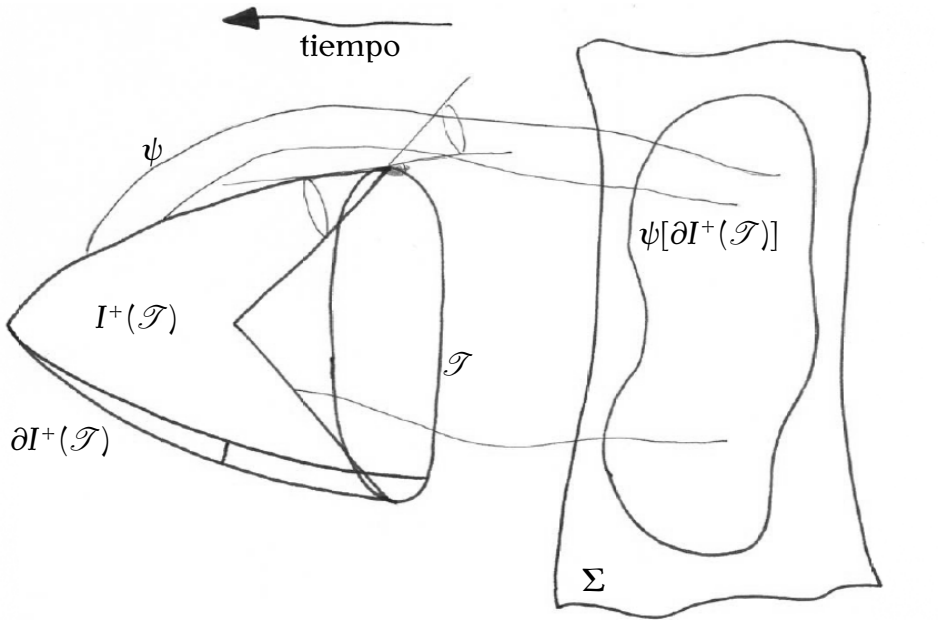


Figura 4.13: Ilustración de la demostración del teorema de singularidad de Penrose (1965). Se ha suprimido una dimensión espacial.

por ser homeomorfos al conjunto compacto $\mathscr{T} \times [0, 2/|\theta_0|]$ y, por tanto, también lo es su unión $\mathscr{N}$.

Consideremos el *futuro cronológico* $I^+(\mathscr{T})$ de la superficie atrapada $\mathscr{T}$, es decir, el conjunto cuadridimensional de puntos que están conectados con $\mathscr{T}$ mediante una curva temporal dirigida hacia el futuro de $\mathscr{T}$. Sea $\partial I^+(\mathscr{T})$ su frontera tridimensional nula. Si $\theta_0 < 0$, entonces la expansión de las geodésicas nulas de $\partial I^+(\mathscr{T})$ también será negativa, de acuerdo con la ecuación de Raychaudhuri (la vorticidad se anula puesto que las geodésicas nulas son ortogonales a la superficie atrapada $\mathscr{T}$ y se satisface la condición nula de convergencia por hipótesis). Entonces, como ya vimos, la expansión se hace infinitamente negativa en una longitud afín finita (de hecho, menor que $2/|\theta_0|$). Así concluimos que $\partial I^+(\mathscr{T})$ está generada por segmentos geodésicos nulos finitos que parten desde $\mathscr{T}$ hacia su futuro (ver figura 4.13) y es, por tanto, una hipersuperficie nula cerrada incluida en el conjunto compacto $\mathscr{N}$, por lo que $\partial I^+(\mathscr{T})$ es una variedad compacta.

Sea Σ la hipersuperficie de Cauchy no compacta de las hipótesis del teorema y sea $\boldsymbol{t}$ el vector de tiempo global que existe por ser el espaciotiempo globalmente hiperbólico. Consideremos la aplicación $\psi : \partial I^+(\mathscr{T}) \to \Sigma$ tal que para cada punto $p \in \partial I^+(\mathscr{T})$, $\psi(p)$ es el punto de Σ obtenido mediante una curva temporal dirigida hacia el pasado generada por $\boldsymbol{t}$. Puesto que $\partial I^+(\mathscr{T})$ es una hipersuperficie ácrona, las curvas integrales de $\boldsymbol{t}$ pueden cruzarla solo una vez, lo que implica que ψ es un homeomorfismo en su imagen. Entonces, esta imagen $\psi[\partial I^+(\mathscr{T})]$ de la

frontera del futuro cronológico de la superficie atrapada $\mathscr{T}$ satisface las siguientes propiedades.

- La imagen $\psi[\partial I^+(\mathscr{T})] \subset \Sigma$ es compacta por serlo $\partial I^+(\mathscr{T})$ y por ser ψ un homeomorfismo. Por tanto, $\psi[\partial I^+(\mathscr{T})]$ también es cerrada.
- Además, $\partial I^+(\mathscr{T})$ es una variedad diferenciable tridimensional y, por tanto, cada uno de sus puntos tiene un abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^3$. El homeomorfismo ψ preserva esta propiedad, luego cada uno de los puntos de $\psi[\partial I^+(\mathscr{T})]$ tiene un abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, $\psi[\partial I^+(\mathscr{T})]$ es abierta en Σ.

En resumen, la variedad $\psi[\partial I^+(\mathscr{T})]$ es abierta y cerrada en Σ, luego ambas variedades son iguales $\psi[\partial I^+(\mathscr{T})] = \Sigma$ y, como consecuencia, Σ es compacta. Este resultado es obviamente incompatible con la hipótesis de que la hipersuperficie de Cauchy Σ no es compacta. □

4.4.3. Caracterización de las singularidades

Los teoremas de singularidad nos garantizan la incompletitud geodésica temporal o nula de un espaciotiempo bajo ciertas condiciones. Si un espaciotiempo es geodésicamente incompleto, tiene geodésicas que terminan en "algún lugar espaciotemporal". Una dificultad en la tarea de dar un significado preciso a esta afirmación es que las singularidades no pertenecen al espaciotiempo y, por tanto, no están en un lugar espaciotemporal. Esta situación contrasta notablemente con las singularidades que pueden aparecer en otras teorías físicas, como la electrodinámica, que están formuladas en un espaciotiempo fijo y bien definido a priori. En este ejemplo, el campo generado por un carga puntual es singular en el lugar en el que está situada la carga y ese lugar pertenece al espaciotiempo: es ciertamente un suceso espaciotemporal.

Podemos superar parcialmente esta dificultad eliminando la singularidad y dejando un hueco en su lugar. La incompletitud geodésica permite entonces detectar ese agujero porque aparecen geodésicas que no se pueden extender en una de sus direcciones, es decir, terminan en una distancia afín (tiempo propio para las geodésicas temporales y longitud propia para las espaciales) finita. Así, podemos decir que un espaciotiempo es *singular* si posee al menos una geodésica incompleta. Notemos que los espaciotiempos a los que hemos quitado artificialmente algún punto son extensibles analíticamente, por lo que, como ya hicimos al principio de este capítulo, consideraremos que el espaciotiempo ha sido extendido máximamente para estudiar sus singularidades.

Si una geodésica inextensible es incompleta, puede ser porque algún escalar construido mediante potencias del tensor de Riemann, sus derivadas covariantes

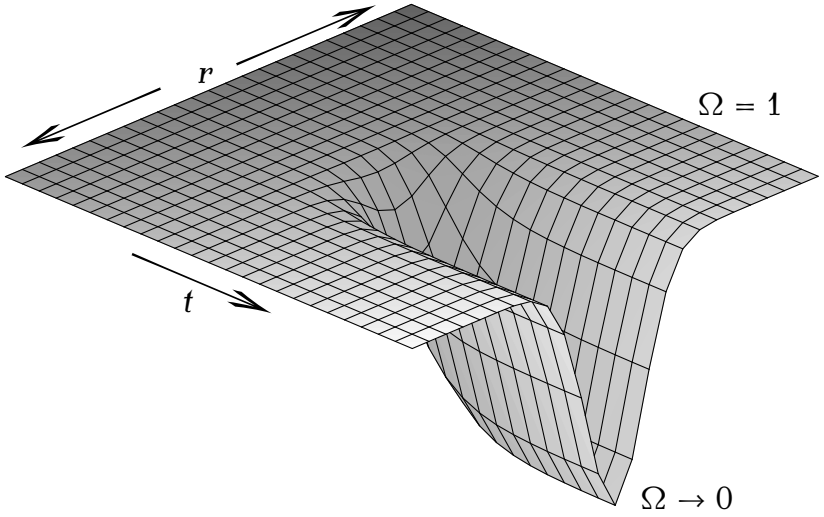


Figura 4.14: Factor conforme Ω tal que la geodésica temporal $r = 0$ es incompleta en la métrica $g_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$.

y sus contracciones crece arbitrariamente al acercarnos al final del recorrido finito de la geodésica. En este caso, diremos que se trata de una *singularidad de curvatura*. También puede ocurrir que alguna componente del tensor de Riemann o de sus derivadas en una base transportada paralelamente a lo largo de la geodésica se haga infinita, en cuyo caso hablaremos de *singularidad de curvatura transportada paralelamente*. Por último, puede ocurrir que no se dé ninguna de estas circunstancias y diremos que el espaciotiempo posee una *singularidad que no es de curvatura*.

El criterio de incompletitud geodésica para caracterizar las singularidades no está necesariamente ligado a la existencia de huecos cuando eliminamos las singularidades. En otras palabras, si existe un hueco, entonces existen geodésicas incompletas pero la existencia de geodésicas incompletas no implican que el espaciotiempo tenga huecos debidos a la eliminación de las singularidades.

Como ejemplo, consideremos un espaciotiempo caracterizado por una métrica conformemente plana $g_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$ tal que Ω es esféricamente simétrico y $\Omega(r > 1) = 1$ y $\Omega(0, t \to \infty) \to 0$ suficientemente rápido (ver figura 4.14). Todas las geodésicas son completas salvo la geodésica temporal $r = 0$.

Otro ejemplo interesante se obtiene intercambiando los papeles de r y t en esta métrica; entonces, este espaciotiempo es geodésicamente incompleto espacialmente pero no temporalmente ni para geodésicas nulas. Este espaciotiempo es singular pero ningún observador ni ningún rayo de luz podrán nunca alcanzar la singularidad que no está en ningún lugar espaciotemporal.

Además, existen espaciotiempos globalmente hiperbólicos y geodésicamente

completos que poseen curvas temporales inextensibles y de aceleración finita que tienen tiempo propio finito, es decir, un observador que siga esa curva acabará su vida en tiempo finito y con un consumo energético finito (pueden encontrarse ejemplos de este tipo de espaciotiempos incompletos, por ejemplo, en la referencia "J.K. Beem, *Gen. Rel. Grav.* **7** (1976) 501; *Some examples of incomplete spacetimes*").

Parece claro que un espaciotiempo con geodésicas temporales o nulas inextensibles incompletas tiene patologías serias, independientemente de que la definición de singularidad sea totalmente satisfactoria o no. Los teoremas de singularidad hacen referencia a este tipo de singularidades. Notemos también que nada nos dicen estos teoremas sobre el carácter de las singularidades (si son de curvatura o no).

4.5. Ejercicios

4.1 Encontrar una extensión analítica máxima y dibujar el diagrama de Penrose del espaciotiempo de Rindler.

4.2 Dada una hipersuperficie nula $\mathscr{N}$ y un vector nulo $\boldsymbol{n}$ perpendicular a ella, demostrar que las curvas tangentes a $\boldsymbol{n}$ son geodésicas nulas tangentes a $\mathscr{N}$. Demostrar que las superficies $x = 0$ del espaciotiempo de Rindler $[\mathrm{d}s^2 = -(ax)^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2]$ son horizontes de Killing.

4.3 Demostrar que, si el flujo geodésico de un fluido perfecto en un cierto espaciotiempo tiene expansión y cizalladura nulas, entonces el espaciotiempo es estacionario. Demostrar que, si además no tiene vorticidad, entonces es estático.

4.4 Demostrar que, en una congruencia de geodésicas temporales, el vector de desviación se puede escoger perpendicular a las líneas de flujo.

4.5 Encontrar la ecuación de Raychaudhuri para una congruencia temporal no geodésica.

4.6 Determinar la ecuación de estado de un fluido perfecto autogravitante sin expansión, vorticidad ni cizalladura cuyo flujo es geodésico.

4.7 Decidir si el espaciotiempo de Schwarzschild es singular mediante la aplicación los teoremas de singularidad y, en caso afirmativo, describir sus singularidades.

4.8 Estudiar las posibles singularidades del espaciotiempo cónico construido de la siguiente manera: tomamos el espaciotiempo de Minkowski, suprimimos la región descrita por valores del ángulo azimutal $\phi \in (0, \phi_0)$ e identificamos los puntos correspondientes a $\phi = 0$ con los correspondientes a $\phi = \phi_0$. Calcular el tensor de Riemann y relacionar su valor con el posible comportamiento singular de este espaciotiempo.

4.9 Identificar las singularidades coordenadas y esenciales de la métrica espaciotemporal de Reissner-Nordström para todos los posibles valores de los parámetros que determinan esta métrica. Analizar la predictibilidad para aquellos valores de los parámetros para los que no existen singularidades coordenadas.

4.10 Determinar los valores de los parámetros que determinan la métrica de Reissner-Nordström para los que ésta presenta un horizonte exterior de sucesos y otro interior que resulta ser un horizonte de Cauchy. Demostrar que no es posible cruzar el primero sin cruzar el segundo posteriormente. Obtener una cota superior para el tiempo propio empleado entre ambos cruces. Decidir si, después de cruzar el horizonte de Cauchy, es inevitable caer en la singularidad.

4.11 Dibujar el diagrama de Penrose de la extensión analítica máxima del espaciotiempo de Reissner-Nordström.

Tema 5

Formulación hamiltoniana

5.1. Descomposición 3 + 1
5.2. Hamiltoniano
- 5.2.1. Campos materiales
- 5.2.2. Campo gravitatorio
- 5.2.3. Hamiltoniano total
- 5.2.4. Dinámica hamiltoniana

5.3. Álgebra de ligaduras y difeomorfismos espaciotemporales
5.4. Términos de superficie. Masa y momento angular ADM
5.5. Ejercicios

5.1. Descomposición 3 + 1

En este tema, consideraremos que el espaciotiempo es globalmente hiperbólico. Por tanto, posee una función global de tiempo t cuyo flujo está generado por el vector t^a, es decir, tal que $t^a\nabla_a t = 1$, y que permite foliar todo el espaciotiempo en hipersuperficies espaciales de Cauchy Σ_t homeomorfas de la forma t = constante (difeomorfas si la función t es C^∞, como supondremos en lo que sigue). Podemos separar el vector del flujo temporal t^a en sus componentes normal y tangente a Σ_t:

$$N = -t^a n_a, \qquad N^a = h^a{}_b t^b, \qquad t^a = Nn^a + N^a.$$

La componente normal N recibe el nombre de *función lapso* y la tangente N^a *vector desplazamiento*. La función lapso también determina la proporcionalidad entre $\nabla_a t$, que es perpendicular a Σ_t, y la normal n_a a esta superficie. Teniendo en cuenta que $t^a\nabla_a t = 1$, es fácil ver que $\nabla_a t = -N^{-1}n_a$.

Como vimos en §1.3.4.2, la métrica espaciotemporal g_{ab}, la métrica inducida en la superficie espacial Σ_t y su normal n_a están relacionadas por

$$g_{ab} = h_{ab} - n_a n_b = h_{ab} - N^{-2}(t_a - N_a)(t_b - N_b).$$

Si utilizamos t como la coordenada temporal y x^i son coordenadas en Σ_t, las componentes de la métrica son

$$g_{00} = g_{ab}t^a t^b = -(N^2 - N_i N^i), \qquad g_{0i} = g_{ab}t^a e_i{}^b = N_i, \qquad g_{ij} = g_{ab}e_i{}^a e_j{}^b = h_{ij},$$

de forma que el elemento de línea en estas coordenadas es

$$\mathrm{d}s^2 = -(N^2 - N_i N^i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i \mathrm{d}t\mathrm{d}x^i + h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

El elemento de volumen espaciotemporal $\mathrm{d}v$ y el correspondiente volumen $\mathrm{d}\sigma$ de la hipersuperficie Σ_t, están relacionados (salvo orientación) por la fórmula $n^a(\mathrm{d}v)_{abcd} = (\mathrm{d}\sigma)_{bcd}$, como ya vimos en §1.4.3.2. En términos de las formas densitizadas d^4x y d^3x, podemos escribir esta relación de la siguiente forma: $n^a|g|^{1/2}(\mathrm{d}^4x)_{abcd} = h^{1/2}(\mathrm{d}^3x)_{bcd}$. Además, en una base coordenada que contenga el tiempo global t, la forma densitizada $\mathrm{d}^4x \equiv \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x$ adquiere la expresión $(\mathrm{d}^4x)_{abcd} = 4\nabla_{[a}t(\mathrm{d}^3x)_{bcd]} = \nabla_a t(\mathrm{d}^3x)_{bcd}$ de manera que $n^a\nabla_a t|g|^{1/2} = h^{1/2}$. Por último, si tenemos en cuenta que $n^a\nabla_a t = N^{-1}$, obtenemos la relación entre el determinante de la métrica espaciotemporal y el de la métrica espacial en esta base $|g|^{1/2} = Nh^{1/2}$ y, por tanto, la relación $\mathrm{d}v = N\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\sigma \equiv N\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma$.

5.2. Hamiltoniano

5.2.1. Campos materiales

Comencemos por los campos materiales. Para simplificar la discusión nos centraremos en un ejemplo concreto: el de un campo escalar real ϕ cuya densidad lagrangiana es

$$\mathscr{L}_{\text{M}} = -\frac{1}{2}|g|^{1/2}\left[g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi + 2V(\phi)\right].$$

Si denotamos $\dot{\phi} = \pounds_t\phi = t^a\nabla_a\phi$, la descomposición 3 + 1 del espaciotiempo nos convierte esta expresión en

$$\mathscr{L}_{\text{M}} = -\frac{1}{2}Nh^{1/2}\left[h^{ab}\text{D}_a\phi\text{D}_b\phi - N^{-2}(\dot{\phi} - N^a\text{D}_a\phi)^2 + 2V(\phi)\right],$$

donde D_a es la derivada covariante espacial. El momento canónico es entonces

$$p_\phi = \frac{\partial\mathscr{L}_{\text{M}}}{\partial\dot{\phi}} = N^{-1}h^{1/2}(\dot{\phi} - N^a\text{D}_a\phi) = h^{1/2}n^a\text{D}_a\phi.$$

Es importante notar que el momento canónico es una densidad escalar puesto que contiene $h^{1/2}$.

Mediante una transformación de Legendre (EJERCICIO) obtenemos la densidad hamiltoniana $(p_\phi\dot{\phi} - \mathscr{L}_{\text{M}})_{\dot{\phi}\to p_\phi}$ de forma que el hamiltoniano y la acción quedan

$$H_{\text{M}} = \int_{\Sigma_t}\text{d}^3x(N\mathscr{S}_{\text{M}} + N^a\mathscr{D}_{\text{M},a}), \qquad S_{\text{M}} = \int\text{d}t\left(\int_{\Sigma_t}\text{d}^3x p_\phi\dot{\phi} - H_{\text{M}}\right),$$

donde $\mathscr{S}_{\text{M}}$ y $\mathscr{D}_{\text{M},a}$ son funciones de las variables canónicas ϕ y p_ϕ y de la métrica espacial:

$$\mathscr{S}_{\text{M}} = \frac{1}{2}h^{1/2}\left[h^{-1}p_\phi^2 + h^{ab}\text{D}_a\phi\text{D}_b\phi + 2V(\phi)\right], \qquad \mathscr{D}_{\text{M},a} = p_\phi\text{D}_a\phi.$$

5.2.2. Campo gravitatorio

El campo gravitatorio está descrito por la acción de Hilbert-Einstein más el término de superficie que garantiza un problema variacional bien puesto bajo variaciones de la métrica que se anulan en la frontera

$$S_{\text{G}} = \frac{1}{16\pi\text{G}}\int_{\mathscr{M}}|g|^{1/2}R\text{d}^4x + \frac{1}{8\pi\text{G}}\int_{\partial\mathscr{M}}\tilde{K}|\tilde{h}|^{1/2}\text{d}^3x.$$

Recordemos que la tilde ˜ hace referencia a cantidades características de la frontera $\partial\mathscr{M}$. A partir de las fórmulas de Gauss y de Gauss-Codazzi que vimos en §1.3.4.3, es fácil ver que el escalar de curvatura se puede escribir en términos del escalar de curvatura $\bar{R}$ de la hipersuperficie Σ_t, de su normal n^a y de su curvatura extrínseca K_{ab} como (EJERCICIO)

$$R = \bar{R} + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2\nabla_a\zeta^a, \qquad \zeta^a = n^a\nabla_c n^c - n^c\nabla_c n^a. \tag{5.1}$$

Teniendo en cuenta el término de superficie que surge de la ecuación 5.1, podemos escribir la acción gravitatoria como

$$S_{\mathrm{G}} = \int_{\mathscr{M}} \mathscr{L}_{\mathrm{G}}\mathrm{d}^4x + \frac{1}{8\pi\mathrm{G}}\int_{\partial\mathscr{M}} (\tilde{n}_a\zeta^a + \tilde{K})|\tilde{h}|^{1/2}\mathrm{d}^3x,$$

donde la densidad lagrangiana del campo gravitatorio es

$$\mathscr{L}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{16\pi\mathrm{G}}Nh^{1/2}(\bar{R} + K_{ab}K^{ab} - K^2).$$

La frontera $\partial\mathscr{M}$ del espaciotiempo tiene varias componentes. Por un lado, $\mathscr{M}$ está limitado por la hipersuperficie inicial Σ_0 y por la hipersuperficie final Σ_1 definidas por $t = 0,\ 1$, respectivamente. Por el otro, $\mathscr{M}$ está limitado por el "lateral del cilindro" $\mathscr{B} = [0,1]\times S_t$, donde $S_t = \partial\Sigma_t$ es la frontera bidimensional de la hipersuperficie Σ_t (notemos que la función global de tiempo t introduce una foliación de $\mathscr{B}$ en superficies S_t de tiempo constante). Conviene recordar que n^a denota la normal a las superficies Σ_t y que $\tilde{n}^a$ es la normal a la frontera. Por tanto, en la parte de la frontera correspondiente a las superficies inicial y final Σ_0 y Σ_1, ambas coinciden salvo signo: $\tilde{n}^a|_{\Sigma_{0,1}} = \pm n^a$ (ver figura 5.1 y §1.4.3.3). Así, la frontera del espaciotiempo tiene tres piezas: $\partial\mathscr{M} = \Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\mathscr{B}$. Veamos cuál es la contribución de cada una de ellas al término de superficie de la acción.

- Contribución de Σ_1. En esta superficie, $\tilde{n}^a = -n^a$, $\tilde{h} = h$ y $\tilde{K} = -K$. Haciendo uso de la definición de la curvatura extrínseca, es fácil ver (EJERCICIO) que $n_a\zeta^a = -K$, de forma que esta contribución se anula.
- Contribución de Σ_0. Análogamente al caso anterior, en esta superficie, se verifica $\tilde{n}^a = n^a$, $\tilde{h} = h$ y $\tilde{K} = K$, de forma que la contribución de esta parte de la frontera también se anula.
- Contribución de $\mathscr{B}$. En esta superficie, $\tilde{n}^a$ es perpendicular a n^a. Por tanto, $\tilde{n}_a\zeta^a = -\tilde{n}_a n^c\nabla_c n^a = n_a n^c\nabla_c\tilde{n}^a$. Por otro lado, a partir de la definición de la curvatura extrínseca, vemos que $\tilde{K} = \tilde{h}^{ab}\nabla_a\tilde{n}_b$. Juntando ambos resultados obtenemos

$$\tilde{n}_a\zeta^a + \tilde{K} = (g^{ab} + n^a n^b - \tilde{n}^a\tilde{n}^b)\nabla_a\tilde{n}_b = k.$$

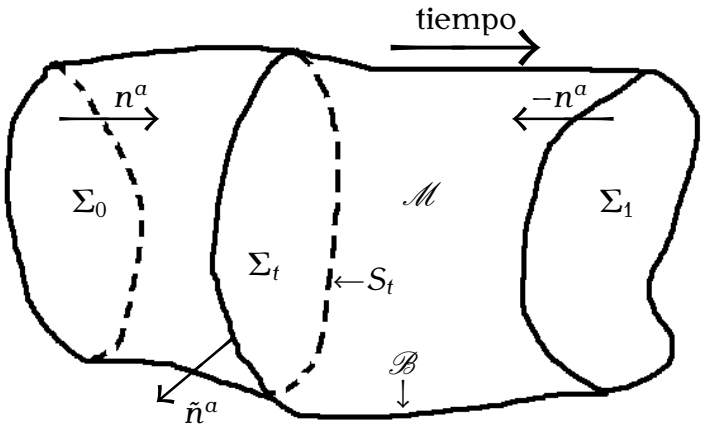


Figura 5.1: El espaciotiempo $\mathscr{M}$ y su frontera $\partial\mathscr{M} = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \mathscr{B}$, donde $\mathscr{B} = [0,1] \times S_t$.

En esta expresión, hemos introducido k, que es, como vamos a ver, la traza de la curvatura extrínseca de S_t embebida en Σ_t. En efecto, si llamamos $\gamma_{ab} = h_{ab} - \tilde{n}_a\tilde{n}_b = g_{ab} + n_a n_b - \tilde{n}_a\tilde{n}_b$ a la primera forma fundamental de S_t, por definición, $k = \gamma^{ab}\mathrm{D}_a\tilde{n}_b$ y, en esta expresión, podemos obviamente sustituir D_a por ∇_a gracias a la presencia multiplicativa del proyector γ^{ab}. Por último, los elementos de volumen de $\mathscr{B}$ y de S_t están relacionados mediante la expresión $|\tilde{h}|^{1/2}\mathrm{d}^3x = N\gamma^{1/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}^2x$.

En resumen, el término de superficie de la acción gravitatoria se reduce a la expresión $(8\pi\mathrm{G})^{-1}\int_{\mathscr{B}} N\gamma^{1/2}k\mathrm{d}t\mathrm{d}^2x$. Este término depende solo de la función lapso y de la métrica espacial pero no de su derivada temporal. La acción gravitatoria adquiere entonces la forma lagrangiana

$$S_{\mathrm{G}} = \int \mathrm{d}t L_{\mathrm{G}}, \qquad L_{\mathrm{G}} = \int_{\Sigma_t} \mathscr{L}_{\mathrm{G}}\mathrm{d}^3x + \frac{1}{8\pi\mathrm{G}}\int_{S_t} N\gamma^{1/2}k\mathrm{d}^2x.$$

Esta acción es nuestro punto de partida para formular la teoría hamiltoniana.

La curvatura extrínseca se puede escribir de la siguiente forma (EJERCICIO) en términos de la derivada de Lie de la métrica inducida a lo largo del flujo temporal $\dot{h}_{ab} = \pounds_t h_{ab}$ y de la derivada covariante espacial del vector desplazamiento:

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_{\boldsymbol{n}} h_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}[\dot{h}_{ab} - 2\mathrm{D}_{(a}N_{b)}].$$

Entonces, el momento canónico conjugado a la métrica espacial está dado por la densidad tensorial (recordemos que el término de superficie de la acción gravi-

tatoria no depende de $\dot{h}_{ab}$)

$$p^{ab} = \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{G}}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} h^{1/2}(K^{ab} - K h^{ab}), \qquad K^{ab} = 16\pi \mathrm{G} h^{-1/2}(p^{ab} - h^{ab}p/2).$$

El hamiltoniano se obtiene mediante una transformación de Legendre

$$H_{\mathrm{G}} = \left(\int_{\Sigma_t} p^{ab}\dot{h}_{ab}\mathrm{d}^3x - L_{\mathrm{G}} \right)_{\dot{h}_{ab}\to p^{ab}}, \qquad S_{\mathrm{G}} = \int \mathrm{d}t \left(\int_{\Sigma_t} p^{ab}\dot{h}_{ab}\mathrm{d}^3x - H_{\mathrm{G}} \right),$$

de manera que, tras algunos cálculos (EJERCICIO), adquiere la forma

$$H_{\mathrm{G}} = \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x (N\mathscr{S}_{\mathrm{G}} + N^a \mathscr{D}_{\mathrm{G},a}) + H'_{\mathrm{S}}$$

donde $\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$ y $\mathscr{D}_{\mathrm{G},a}$ son funciones de las variables canónicas h_{ab} y p^{ab},

$$\mathscr{S}_{\mathrm{G}} = 16\pi \mathrm{G} h^{-1/2}(p^{ab}p_{ab} - p^2/2) - \frac{1}{16\pi \mathrm{G}} h^{1/2}\bar{R}, \qquad \mathscr{D}_{\mathrm{G},a} = -2h_{ab}\mathrm{D}_c p^{bc},$$

y H'_{S} es un término de superficie evaluado en la frontera S_t de la hipersuperficie Σ_t:

$$H'_{\mathrm{S}} = \frac{1}{8\pi \mathrm{G}} \int_{S_t} (N_a \tilde{n}_b h^{-1/2} p^{ab} - Nk)\gamma^{1/2}\mathrm{d}^2x.$$

5.2.3. Hamiltoniano total

Podemos ahora construir el hamiltoniano del sistema total del campo material acoplado a la gravedad y su acción simplemente sumando ambas contribuciones,

$$H = H_{\Sigma} + H'_{\mathrm{S}}, \qquad S = \int \mathrm{d}t \left[\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x (\dot{h}_{ab}p^{ab} + \dot{\phi}p_{\phi}) - H \right],$$

donde hemos definido

$$H_{\Sigma} = \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x (N\mathscr{S} + N^a \mathscr{D}_a), \qquad \mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathrm{G}} + \mathscr{S}_{\mathrm{M}}, \qquad \mathscr{D}_a = \mathscr{D}_{\mathrm{G},a} + \mathscr{D}_{\mathrm{M},a}.$$

5.2.4. Dinámica hamiltoniana

La evolución temporal de cualquier funcional $F[h_{ab}, p^{ab}]$ de las variables canónicas se obtiene mediante su corchete de Poisson[1] con el hamiltoniano

[1] Recordemos que el corchete de Poisson de dos funcionales $F[\psi, p]$ y $G[\psi, p]$ de los campos ψ_n y de sus momentos canónicos p_n está dado por

$\dot{F} = \{F, H\}$. En particular, las ecuaciones de Hamilton proporcionan las ecuaciones de movimiento y su forma explícita se puede encontrar, por ejemplo, en la referencia [2]. Las seis ecuaciones de evolución de la métrica $\dot{h}_{ab} = \{h_{ab}, H\}$ proporcionan la relación entre $\dot{h}_{ab}$ y p^{ab}. Las otras seis ecuaciones nos dicen cómo evoluciona el momento canónico gravitatorio $\dot{p}^{ab} = \{p^{ab}, H\}$. Estas doce ecuaciones de primer orden son enteramente equivalentes a las seis componentes espaciales de las ecuaciones de Einstein (que son de segundo orden en las derivadas temporales). Además, tenemos que tener en cuenta las ecuaciones de evolución de los campos materiales de manera análoga.

La función lapso N y el vector desplazamiento N^a no son variables dinámicas puesto que la acción no contiene derivadas temporales de estas variables: son multiplicadores de Lagrange. Sus ecuaciones clásicas se obtienen de anular la variación de la acción con respecto a variaciones de ellos que se anulen en la frontera y proporcionan las ligaduras que deben satisfacer la métrica espacial, los campos materiales y sus momentos canónicos en todo instante de tiempo, es decir, en toda hipersuperficie Σ_t:

$$0 = -\frac{\delta S}{\delta N} = \mathscr{S}, \qquad 0 = -\frac{\delta S}{\delta N^a} = \mathscr{D}_a.$$

Notemos que las contribuciones provenientes del término de superficie H'_S son nulas ya que δN y δN^a se anulan en la frontera. Estas cuatro ecuaciones son equivalentes a las obtenidas proyectando las ecuaciones de Einstein sobre la normal $(G_{ab} - 8\pi G T_{ab})n^a = 0$ que, como ya vimos, no eran ecuaciones dinámicas. Además, como veremos en §5.3, los corchetes de Poisson de dos cualesquiera de estas cuatro ligaduras son combinaciones lineales de ellas mismas (en la teoría de Dirac para sistemas con ligaduras,[2] son *ligaduras de primera clase*).

Cada una de estas ligaduras de primera clase elimina un grado de libertad completo, es decir, dos variables en el espacio de fases: por un lado, restringe los posibles datos directamente; por el otro, dentro del espacio reducido, podemos fijar libremente un origen irrelevante. En vez de desarrollar la teoría completa de Dirac para sistemas con ligaduras, ilustraremos este proceso de eliminación de grados de libertad por las ligaduras de primera clase en el lenguaje de Dirac con un ejemplo sencillo. Consideremos un sistema de N partículas libres idénticas descrito por las variables canónicas x^i_n y p^i_n sometido a la condición de

$$\{F, G\} = \sum_n \int_{\Sigma_t} d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \psi_n} \frac{\delta G}{\delta p_n} - \frac{\delta F}{\delta p_n} \frac{\delta G}{\delta \psi_n} \right).$$

[2] Ver, por ejemplo, las siguientes referencias:

- P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Scientific, Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
- M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992.

que la suma de todos los momentos se anule: $\sum_n p_n^i = 0$. En el espacio obtenido al imponer estas tres ligaduras (que es de dimensión impar), las variables $Q^i = N^{-1}\sum_n q_n^i$ que describen la posición del centro de inercia son irrelevantes pues dependen exclusivamente del origen del sistema de referencia, que se puede fijar libremente.

El recuento de grados de libertad del campo gravitatorio es el siguiente. Tenemos seis componentes de la métrica espacial y otros seis de su momento conjugado. Estas doce variables obedecen cuatro ligaduras de primera clase por lo que nos quedan cuatro variables en el espacio de fases, es decir, dos grados de libertad que corresponden, como veremos, a las dos posibles polarizaciones de las ondas gravitatorias.

EJERCICIO: Estudiar el campo electromagnético desde el punto de vista hamiltoniano.

5.3. Álgebra de ligaduras y difeomorfismos espaciotemporales

Si definimos las ligaduras suavizadas

$$S[\epsilon] = \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\,\epsilon\mathscr{S}, \qquad D[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}] = \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\,\bar{\epsilon}^a\mathscr{D}_a,$$

donde ϵ es una función escalar y $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ un vector tangente a Σ (para espaciotiempos cuyas secciones espaciales no sean compactas, debemos exigir además que ϵ, $\mathrm{D}_a\epsilon$ y $\bar{\epsilon}^a$ se anulen en la frontera de Σ_t), los corchetes de Poisson entre las ligaduras $S[\epsilon] = 0$, $D[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}] = 0$ son (EJERCICIO largo)

$$\begin{aligned}
\{S[\epsilon], S[\epsilon']\} &= -D[h^{ab}(\epsilon\mathrm{D}_b\epsilon' - \epsilon'\mathrm{D}_b\epsilon)],\\
\{D[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}], S[\epsilon]\} &= -S[\pounds_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}\epsilon],\\
\{D[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}], D[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}']\} &= -D[\pounds_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}'].
\end{aligned}$$

Vemos que las ligaduras *conmutan débilmente*, es decir, que su corchete de Poisson se anula sobre soluciones de las propias ligaduras. Sin embargo, esta álgebra contiene funciones de estructura en vez de constantes de estructura, puesto que involucran las variables del espacio de fases, en particular, h^{ab}. Por tanto, las ligaduras constituyen un álgebra abierta, no un álgebra de Lie.

Las ligaduras generan simetrías mediante corchetes de Poisson puesto que son cantidades conservadas (nulas) en la evolución. Para ver qué simetrías generan, podemos calcular los corchetes de Poisson de estas ligaduras con las variables del espacio de fases.

Comencemos por $D[\bar{\epsilon}]$ (EJERCICIO):

$$\delta_{\bar{\epsilon}}\phi = \{\phi, D[\bar{\epsilon}]\} = \mathfrak{L}_{\bar{\epsilon}}\phi, \qquad \delta_{\bar{\epsilon}}p_\phi = \{p_\phi, D[\bar{\epsilon}]\} = \mathfrak{L}_{\bar{\epsilon}}p_\phi,$$
$$\delta_{\bar{\epsilon}}h_{ab} = \{h_{ab}, D[\bar{\epsilon}]\} = \mathfrak{L}_{\bar{\epsilon}}h_{ab}, \qquad \delta_{\bar{\epsilon}}p^{ab} = \{p^{ab}, D[\bar{\epsilon}]\} = \mathfrak{L}_{\bar{\epsilon}}p^{ab}.$$

De estas expresiones, vemos que $\mathscr{D}_a$ genera difeomorfismos espaciales en cada superficie t = constante.

Por otro lado $S[\epsilon]$ genera las siguientes transformaciones en el espacio de fases (EJERCICIO, salvo $\delta_\epsilon p^{ab}$):

$$\delta_\epsilon\phi = \{\phi, S[\epsilon]\} = \mathfrak{L}_{\epsilon\boldsymbol{n}}\phi \qquad \delta_\epsilon p_\phi = \{p_\phi, S[\epsilon]\} = \mathfrak{L}_{\epsilon\boldsymbol{n}}p_\phi + \text{“}\nabla_a T^{ab}\text{”},$$
$$\delta_\epsilon h_{ab} = \{h_{ab}, S[\epsilon]\} = \mathfrak{L}_{\epsilon\boldsymbol{n}}h_{ab}, \quad \delta_\epsilon p^{ab} = \{p^{ab}, S[\epsilon]\} = \mathfrak{L}_{\epsilon\boldsymbol{n}}p^{ab} + \text{“}G_{ab} - 8\pi G T_{ab}\text{”}.$$

En estas ecuaciones, las expresiones entre comillas representan términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento que, por tanto, se anulan para las soluciones clásicas. Así, vemos que $\mathscr{S}$ genera, solo para las soluciones clásicas, deformaciones de las superficies espaciales en la dirección normal. Si tenemos en cuenta que $\epsilon\boldsymbol{n} = \epsilon N^{-1}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{N})$, podemos concluir que $\mathscr{S}$ genera reparametrizaciones temporales con parámetro ϵ/N salvo por un difeomorfismo espacial a lo largo de $\epsilon N^a/N$. Conviene notar que los difeomorfismos espaciales, generados por $\mathscr{D}_a$, son aplicaciones de una hipersuperficie Σ_t en ella misma, mientras que las transformaciones generadas por $\mathscr{S}$ y las reparametrizaciones temporales no son endomorfismos de las hipersuperficies t = constante sino que las deforman.

Estas transformaciones canónicas de simetría pueden considerarse transformaciones gauge si se completan con leyes de transformación adecuadas para las funciones lapso y desplazamiento. Entonces, la variación de la acción bajo estas transformaciones (junto con leyes adecuadas para la transformación de los multiplicadores N y N^a) es (EJERCICIO largo)

$$\begin{aligned}\delta S &= -\left[p^{ab}\{h_{ab}, S[\epsilon]\} + p_\phi\{\phi, S[\epsilon]\} - S[\epsilon]\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= -\left[\epsilon(2p^{ab}K_{ab} + h^{-1/2}p_\phi^2)\right]_{t=0}^{t=1},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la ligadura $\mathscr{S} = 0$ para obtener la última expresión. Esta variación se anula si la transformación es tal que $\epsilon|_{t=0} = \epsilon|_{t=1} = 0$. Vemos que la ligadura $\mathscr{D}_a$ genera transformaciones que no afectan a la acción. Sin embargo, la ligadura escalar $\mathscr{S}$ genera transformaciones que, en general, no dejan la acción invariada. Solo algunas de las transformaciones generadas por $\mathscr{S}$ son simetrías del sistema: aquellas que no afectan a las fronteras $\Sigma_{0,1}$.

Desde el punto de vista formal, puede verse que la diferencia entre ambos comportamientos se debe al carácter lineal de la ligadura $\mathscr{D}_a$ en los momentos (como ocurre también ocurre con la ligadura de Gauss, generatriz de transfor-

maciones gauge del campo electromagnético) y a la dependencia cuadrática en el caso de $\mathscr{S}$. Esta dependencia cuadrática es típica de sistemas covariantes.

Desde el punto de vista geométrico, la acción mediante corchetes de Poisson de la ligadura $\mathscr{S}$ produce una deformación de las hipersuperficies Σ_t (en particular, de cada una de las fronteras $\Sigma_{0,1}$) en la dirección normal. Por tanto el volumen espaciotemporal sobre el que hemos calculado la acción cambia, a menos que las fronteras no se deformen, es decir, a menos que $\epsilon|_{t=0} = \epsilon|_{t=1} = 0$. No ocurre lo mismo con $\mathscr{D}_a$ que transforma las fronteras en ellas mismas, es decir, que genera difeomorfismos en las mismas, como hemos visto.

La ligadura escalar $\mathscr{S}$ está conectada con la invariancia bajo reparametrizaciones temporales. De hecho, en algunos aspectos es similar a la ligadura que se obtiene cuando se parametriza de forma arbitraria una teoría sin ligaduras. Consideremos, por ejemplo, una partícula no relativista de masa m en un potencial $V(t, x^i)$. Su acción es

$$S[x^i, p_i] = \int dt \left[p_i \frac{dx^i}{dt} - h(t, x^i, p_i) \right], \qquad h = \frac{1}{2m} \delta^{ij} p_i p_j + V(t, x^i).$$

Parametricemos ahora la trayectoria de la partícula mediante un tiempo arbitrario τ y consideremos t como una variable de configuración más:

$$x^\alpha = (t, x^i), \qquad x^\alpha = x^\alpha(\tau), \qquad p_\alpha = p_\alpha(\tau).$$

Entonces, la acción

$$S[x^\alpha, p_\alpha, N] = \int d\tau (p_\alpha \dot{x}^\alpha - NH), \qquad H(x^\alpha, p_\alpha) = p_0 + h(x^\alpha, p_i),$$

proporciona como ecuaciones de Euler-Lagrange las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{t} = N, \qquad \dot{x}^i = N p^i / m, \qquad \dot{p}_0 = 0, \qquad \dot{p}_i = -N \partial_i V,$$

suplementadas con la ligadura $-\delta S / \delta N = H = p_0 + h = 0$. Si dividimos todas las ecuaciones por la primera obtenemos las ecuaciones clásicas en términos de t y la ecuación de conservación de la energía. Claramente, la ligadura $H = 0$ surge porque el tiempo t y la energía de la partícula $-p_0$ han pasado a formar parte de las variables canónicas. En este ejemplo, la ligadura es lineal en el momento p_0 canónicamente conjugado a t y podemos deparametrizar la teoría resolviendo la ligadura (a diferencia de lo que ocurre en relatividad general).

5.4. Términos de superficie. Masa y momento angular ADM

Si las secciones espaciales Σ_t del espaciotiempo son compactas, entonces no tienen frontera y el término de superficie H'_S se anula.

En esta sección, consideraremos otro caso de interés: el de *espaciotiempos asintóticamente planos*, es decir, espaciotiempos tales que, cerca del infinito espacial, su métrica se convierte en la métrica plana de Minkowski (ver § 4.1.2).

Para el espaciotiempo de Minkowski, el hamiltoniano diverge. En efecto, las ligaduras $\mathscr{S}$ y $\mathscr{D}_a$ se anulan para cualquier solución de las ecuaciones de Einstein y, en particular, para la solución plana. Como consecuencia, $H^{\text{sol}}_\Sigma = 0$ y el valor del hamiltoniano sobre soluciones es $H^{\text{sol}} = H'_S$. Si utilizamos como tiempo global el tiempo de Minkowski, las secciones espaciales Σ_t de este espaciotiempo son planas. Su curvatura extrínseca se anula y, por tanto, $p^{ab} = 0$. Escojamos S^∞_t como una esfera de radio R arbitrariamente grande. La traza de su curvatura extrínseca como superficie embebida en Σ_t es $k = 1/R$. Además, $N = 1$ y $\gamma^{1/2}\mathrm{d}^2x = R^2\mathrm{d}\Omega$, de forma que $H'_S \sim R \to \infty$. Lo mismo ocurre para cualquier espaciotiempo asintóticamente plano.

Para que el hamiltoniano adquiera un valor nulo en la solución correspondiente al espaciotiempo de Minkowski, modificaremos el término de superficie mediante la adición de una contribución no dinámica que compense el comportamiento que acabamos de describir. Con esta finalidad, sustituiremos el término de superficie H'_S en la definición del Hamiltoniano por

$$H_S = \frac{1}{8\pi G}\int_{S^\infty_t}[N_a\tilde{n}_b h^{-1/2}p^{ab} - N(k-k_0)]\gamma^{1/2}\mathrm{d}^2x,$$

donde k_0 es la traza de la curvatura extrínseca de la superficie S^∞_t en el espaciotiempo de Minkowski, utilizado como referencia. Así, el nuevo hamiltoniano, $H = H_\Sigma + H_S$, adquiere un valor nulo para la solución plana de Minkowski.

En general, no es posible asignar una energía a un espaciotiempo dado, solución de las ecuaciones dinámicas descritas en § 5.2.4. Un ejemplo que ya nos hemos encontrado es el de espaciotiempos con secciones espaciales compactas, para los que el hamiltoniano se anula sobre soluciones (por no tener términos de superficie). Sin embargo, los espaciotiempos asintóticamente planos permiten introducir un concepto de masa y de momento angular[3] asociado a todo el espaciotiempo mediante el procedimiento que describimos a continuación.

[3]Puede encontrarse un estudio detallado de este tema y situación actual en la referencia "L.B. Szabados, *Living Rev. Relativity* **7** (2004) 4; http://www.livingreviews.org/lrr-2004-4; *Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity: A review article*".

Consideremos el tensor $\mathscr{T}^{ab}$ definido en la frontera $\mathscr{B}^\infty = [0,1] \times S_t^\infty$ de un espaciotiempo asintóticamente plano mediante la expresión

$$\mathscr{T}^{ab} = 2|\tilde{h}|^{-1/2}\frac{\delta S^{\mathrm{sol}}}{\delta \tilde{h}_{ab}},$$

donde S^{sol} es la acción de la solución de las ecuaciones dinámicas. Teniendo en cuenta que (EJERCICIO)

$$\frac{\partial \tilde{h}_{ab}}{\partial N} = -2n_a n_b/N, \qquad \frac{\partial \tilde{h}_{ab}}{\partial N^c} = -2\gamma_{c(a}n_{b)}/N, \qquad \frac{\partial \tilde{h}_{ab}}{\partial \gamma_{cd}} = \gamma^c_{(a}\gamma^d_{\ b)},$$

podemos escribir $\mathscr{T}^{ab}$ de la forma

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^{ab} &= -\gamma^{-1/2}\frac{\delta S^{\mathrm{sol}}}{\delta N}n^a n^b + 2\gamma^{-1/2}\frac{\delta S^{\mathrm{sol}}}{\delta N^c}\gamma^{c(a}n^{b)} + |\tilde{h}|^{-1/2}\frac{\delta S^{\mathrm{sol}}}{\delta \gamma_{ab}} \\ &= -\frac{1}{8\pi \mathrm{G}}(k-k_0)n^a n^b - \frac{1}{4\pi \mathrm{G}}\tilde{n}_d h^{-1/2}p^{cd}\gamma_c^{\ (a}n^{b)} + |\tilde{h}|^{-1/2}\frac{\delta S^{\mathrm{sol}}}{\delta \gamma_{ab}}.\end{aligned}$$

Puede demostrarse[4] que este tensor, que puede interpretarse como el tensor de energía-momento de todo el espaciotiempo en la frontera $\mathscr{B}^\infty$, tiene divergencia nula, $\tilde{\mathrm{D}}_a\mathscr{T}^{ab} = 0$. Si $\boldsymbol{\xi}$ es un vector de Killing asintótico (definido sobre $\mathscr{B}^\infty$), satisface la ecuación de Killing asintótica $\tilde{\mathrm{D}}_{(a}\xi_{b)} = 0$. Por tanto, la corriente $\xi_b\mathscr{T}^{ab}$ también tiene divergencia nula $\tilde{\mathrm{D}}_a(\xi_b\mathscr{T}^{ab}) = 0$ y la carga

$$Q_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{S_t^\infty}\mathrm{d}^2x\gamma^{1/2}n_a\xi_b\mathscr{T}^{ab} = \frac{1}{8\pi \mathrm{G}}\int_{S_t^\infty}\mathrm{d}^2x\gamma^{1/2}\xi_b\left[(k-k_0)n^b + \tilde{n}_d h^{-1/2}p^{cd}\gamma_c^{\ b}\right]$$

se conserva, es decir, es independiente de la sección t = constante sobre la que la calculemos.

Los espaciotiempos asintóticamente planos admiten un vector de Killing asintótico $\boldsymbol{t}$ de género tiempo (tal que $\boldsymbol{t}^2 = -1$) que proporciona el flujo temporal minkowskiano. En este caso, podemos elegir las hipersuperficies de tiempo constante de forma que, asintóticamente, sean ortogonales a este flujo temporal $\boldsymbol{t}$. Con esta elección, la normal $\boldsymbol{n}$ a las secciones Σ_t coinciden asintóticamente con $\boldsymbol{t}$. Llamaremos *masa ADM (Arnowitt, Deser, Misner)* a la carga conservada correspondiente a este vector de Killing asintótico:

$$M = -\frac{1}{8\pi \mathrm{G}}\int_{S_t^\infty}\mathrm{d}^2x\gamma^{1/2}(k-k_0).$$

[4]Ver, por ejemplo, la referencia "J.D. Brown y J.W. York, Jr., *Phys. Rev.* **D47** (1993) 1407; *Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action*".

Por otro lado, para espaciotiempos asintóticamente planos, la frontera $\mathscr{B}^\infty$ tiene simetría bajo rotaciones, por lo que admite un vector de Killing angular $\boldsymbol{\phi} = \partial_\phi$. Llamaremos *momento angular ADM* a la carga conservada correspondiente a este vector de Killing asintótico:

$$J = -\frac{1}{8\pi G}\int_{S_t^\infty} \mathrm{d}^2x\,\gamma^{1/2}\phi_c\tilde{n}_d h^{-1/2}p^{cd},$$

donde hemos introducido un signo negativo adicional para que satisfaga los convenios habituales.

Es posible demostrar que $H[\epsilon,\bar{\boldsymbol{\epsilon}}] = H_\Sigma[\epsilon,\bar{\boldsymbol{\epsilon}}] + H_S[\epsilon,\bar{\boldsymbol{\epsilon}}]$, donde $H[\epsilon,\bar{\boldsymbol{\epsilon}}]$ representa la expresión del hamiltoniano con las funciones lapso y desplazamiento sustituidas por ϵ y $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, genera difeomorfismos espaciales y reparametrizaciones temporales en el interior del espaciotiempo, como ya hemos visto en §5.3, y traslaciones temporales y espaciales en la zona asintótica, estas últimas generadas por los términos de superficie.

5.5. Ejercicios

5.1 Estudiar el campo electromagnético desde el punto de vista hamiltoniano.

5.2 Demostrar que, en la descomposición $3+1$ de un espaciotiempo globalmente hiperbólico,

a) $R = \bar{R} + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2\nabla_a \zeta^a, \qquad \zeta^a = n^a \nabla_c n^c - n^c \nabla_c n^a,$

b) $K_{ab} = \frac{1}{2}\pounds_{\boldsymbol{n}} h_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}[\dot{h}_{ab} - 2\mathrm{D}_{(a}N_{b)}]$.

5.3 Obtener, a partir de la acción de Hilbert-Einstein, el hamiltoniano del campo gravitatorio.

5.4 Calcular los corchetes de las ligaduras $\mathscr{D}_a$ y $\mathscr{S}$ con las variables del espacio de fases (excepto el momento gravitatorio ya que el cálculo es demasiado largo).

5.5 Demostrar que la masa ADM del espaciotiempo de Schwarzschild es la masa de Schwarzschild.

Tema 6

Radiación gravitatoria

6.1. Propagación y generación *(por Javier Olmedo)*
- 6.1.1. Linealización de las ecuaciones de Einstein en vacío
- 6.1.2. Ondas planas y polarizaciones
- 6.1.3. Radiación cuadrupolar
- 6.1.4. Energía gravitatoria

6.2. Detección *(por Eduardo Martín)*
- 6.2.1. Precisión de los detectores
- 6.2.2. Antena de Weber
  - 6.2.2.1. Modelo de detector
  - 6.2.2.2. Características espectrales
  - 6.2.2.3. Sección eficaz
  - 6.2.2.4. Límites de resolución
- 6.2.3. Detectores interferométricos

6.3. Ejercicios

6.1. Propagación y generación *(por Javier Olmedo[1])*

6.1.1. Linealización de las ecuaciones de Einstein en vacío

Las ecuaciones de Einstein no son lineales, lo que dificulta su resolución de forma exacta. Sin embargo, existen fenómenos que involucran campos tenues y que pueden, por tanto, describirse mediante perturbaciones lineales, como ocurre en el caso de la radiación gravitatoria. Para llevar a cabo este estudio perturbativo, consideraremos un espaciotiempo plano de fondo, con una métrica de Minkowski η_{ab} más perturbaciones γ_{ab}, de modo que la métrica espaciotemporal total puede escribirse como

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab},$$

cuya inversa, en el primer orden de aproximación, es

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab}.$$

Los índices de γ^{ab} han sido subidos con la métrica de Minkowski. Lo mismo ocurrirá con todos los tensores que dependan linealmente de la perturbación, puesto que vamos a descartar todos los términos que no dependen linealmente de ella.

EJERCICIO: Demostrar que los tensores de Riemann y de Ricci y el escalar de curvatura, en la aproximación lineal, son:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_c\tilde{\partial}_b\gamma_{ad} + \tilde{\partial}_d\tilde{\partial}_a\gamma_{bc} - \tilde{\partial}_d\tilde{\partial}_b\gamma_{ac} - \tilde{\partial}_c\tilde{\partial}_a\gamma_{bd}), \\ R_{ab} &= \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_c\tilde{\partial}_b\gamma^c{}_a + \tilde{\partial}_c\tilde{\partial}_a\gamma^c{}_b - \tilde{\partial}_a\tilde{\partial}_b\gamma^c{}_c - \tilde{\partial}_c\tilde{\partial}^c\gamma_{ab}), \\ R &= \tilde{\partial}_a\tilde{\partial}_b\gamma^{ab} - \tilde{\partial}_a\tilde{\partial}^a\gamma^b{}_b, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\partial}_a$ es la derivada covariante compatible con la métrica plana η_{ab}.

Por comodidad, caracterizaremos la perturbación γ_{ab} de la métrica mediante un nuevo tensor $\overline{\gamma}_{ab}$ completamente equivalente definido por

$$\overline{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma^c{}_c.$$

En términos de $\overline{\gamma}_{ab}$, el tensor de Einstein linealizado se puede escribir de la

[1]Correo electrónico: olmedo@iem.cfmac.csic.es.

siguiente manera (EJERCICIO):

$$G_{ab} = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_c\tilde{\partial}^c\overline{\gamma}_{ab} + \tilde{\partial}_c\tilde{\partial}_{(b}\overline{\gamma}^c{}_{a)} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\tilde{\partial}_c\tilde{\partial}_d\overline{\gamma}^{cd}.$$

Dos métricas g_{ab} y g'_{ab} relacionadas mediante un difeomorfismo generado por un campo vectorial ξ^a

$$g'_{ab} = g_{ab} + \pounds_\xi g_{ab}$$

representan el mismo espaciotiempo, como vimos en §3.1 y en §3.3.4. En la aproximación lineal, esta relación implica que dos perturbaciones $\overline{\gamma}'_{ab}$ y $\overline{\gamma}_{ab}$ relacionadas mediante la expresión

$$\overline{\gamma}'_{ab} = \overline{\gamma}_{ab} + 2\tilde{\partial}_{(a}\xi_{b)} - \eta_{ab}\tilde{\partial}_c\xi^c$$

son físicamente equivalentes, es decir, existe una libertad gauge en la elección de la perturbación $\overline{\gamma}_{ab}$ análoga a la presente en la elección del potencial electromagnético A_a.

En §3.3.4, fijábamos esta libertad mediante la condición de de Donder (o gauge armónico), que conduce a la condición de fijación de gauge

$$\tilde{\partial}_a\overline{\gamma}^{ab} = 0 \tag{6.1}$$

para la perturbación, análoga a la condición de fijación del gauge de Lorenz para campos electromagnéticos. Esta es una buena condición de fijación del gauge como comprobamos a continuación. En efecto, dada cualquier perturbación $\overline{\gamma}^{ab}_{\text{no}}$ que no cumpla esta condición, existe un difeomorfismo generado por un campo vectorial ξ^a que la transforma en otra $\overline{\gamma}^{ab}_{\text{sí}}$ que sí la cumple. Dicho difeomorfismo es solución de la ecuación

$$0 = \tilde{\partial}_a\overline{\gamma}^{ab}_{\text{sí}} = \tilde{\partial}_a\overline{\gamma}^{ab}_{\text{no}} + \tilde{\partial}_c\tilde{\partial}^c\xi^b.$$

De hecho, puesto que esta ecuación tiene más de una solución, la condición de de Donder no fija completamente el gauge: queda una libertad gauge residual.

En el gauge de de Donder, las ecuaciones de Einstein en vacío linealizadas adquieren la forma

$$\tilde{\partial}_c\tilde{\partial}^c\overline{\gamma}_{ab} = 0.$$

6.1.2. Ondas planas y polarizaciones

En este apartado, ilustraremos el efecto de las ondas gravitatorias sobre partículas de prueba, mediante el uso de las soluciones de tipo onda plana de las ecuaciones de Einstein linealizadas. Para ello y debido a que vamos a utilizar la

perturbación métrica $\overline{\gamma}_{ab}$ y no la curvatura (el campo gravitatorio propiamente dicho) para describirlas, fijaremos completamente el gauge. De esta manera, podremos trabajar exclusivamente con los grados de libertad físicos.

Como hemos visto en el apartado anterior, la condición de de Donder no fija completamente la libertad gauge. Explícitamente, si una perturbación $\overline{\gamma}_{ab}$ satisface dicha condición, también lo hará cualquier otra relacionada con ella mediante un difeomorfismo generado por un campo vectorial ξ^a que sea solución de la ecuación $\tilde{\partial}_c\tilde{\partial}^c\xi^a = 0$. En una base coordenada en la que $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, las condiciones (que definen el llamado *gauge transversal y sin traza*)

$$\mathrm{tr}(\overline{\gamma}) = 0, \qquad \overline{\gamma}_{0i} = 0, \tag{6.2}$$

son buenas condiciones de fijación de esta libertad gauge residual. En efecto, dada cualquier perturbación $\overline{\gamma}^{\mu\nu}_{\text{no}}$ que no cumpla esta condición (pero que sí cumpla la condición de de Donder), existe un único difeomorfismo generado por ξ^μ que la transforma en otra $\overline{\gamma}^{\mu\nu}_{\text{sí}}$ que sí la cumple. Dicho difeomorfismo es solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= \Box\xi^\mu, \\ 0 &= \mathrm{tr}(\overline{\gamma}_{\text{sí}}) = \mathrm{tr}(\overline{\gamma}_{\text{no}}) + \partial_\mu\xi^\mu, \\ 0 &= \overline{\gamma}_{\text{sí},0i} = \overline{\gamma}_{\text{no},0i} + 2\partial_{(0}\xi_{i)}, \end{aligned}$$

que poseen solución única salvo constantes aditivas (EJERCICIO).

Las ecuaciones de Einstein en vacío linealizadas admiten obviamente soluciones de tipo onda plana, que tienen la forma $\overline{\gamma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik_\rho x^\rho}$ con $k^2 = 0$. Por tanto, la velocidad de propagación es igual a la de la luz. Las condiciones de fijación de gauge 6.1 y 6.2 imponen las siguientes restricciones sobre los coeficientes $A_{\mu\nu}$:

$$k^\mu A_{\mu\nu} = 0, \qquad A^\mu{}_\mu = 0, \qquad A_{0i} = 0,$$

lo que implica que

$$A_{0\mu} = 0, \qquad A^i{}_i = 0, \qquad k^i A_{ij} = 0.$$

Vemos que las soluciones en el gauge 6.2 no tienen traza y, además, oscilan en las direcciones perpendiculares a la de propagación, determinada por $\vec{k}$.

Si tenemos en cuenta que la velocidad que produce la perturbación sobre una masa de prueba es no relativista, entonces podemos aproximar $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ por $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Entonces, la ecuación de desviación geodésica respecto de una geodésica cuyo vector tangente es $\dot{x}^\mu = (-1,0,0,0)$, es decir, respecto de una partícula en reposo en el origen de coordenadas, adquiere la forma

$$\ddot{z}^\mu = \frac{1}{2}z^\rho\partial_t^2\overline{\gamma}^\mu{}_\rho \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{z}^0 = 0, \qquad \ddot{z}^i = -\frac{1}{2}\omega^2 z^j\overline{\gamma}^i{}_j.$$

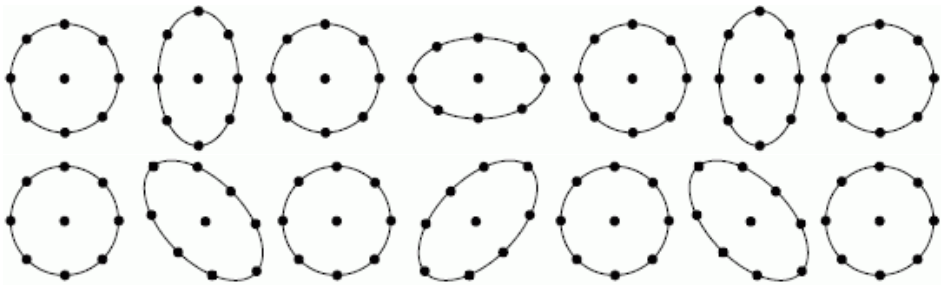


Figura 6.1: Polarizaciones + y × de ondas gravitatorias planas.

La componente temporal nos indica que, en la aproximación que estamos considerando, la onda gravitatoria no afecta al flujo temporal. Ocupémonos ahora de las componentes espaciales. Puesto que nos interesa estudiar el efecto de la onda gravitatoria en la separación $\vec{z}$ entre las dos partículas, supondremos que la dependencia temporal de $\vec{z}$ se debe exclusivamente a la perturbación, por lo que buscaremos soluciones del tipo $\vec{z}(t) = \vec{z}_0 + \vec{z}_1[\gamma(t)]$, siendo $\vec{z}_1$ de primer orden en la perturbación. Así, en esta aproximación, la desviación geodésica $\vec{z}$ satisface la ecuación

$$\ddot{z}^i = -\frac{1}{2}\omega^2 z_0^j A^i{}_j e^{-i\omega t}.$$

Si elegimos unos ejes de coordenadas tales que $\vec{k} = k\vec{e}_3$ y llamamos $A_+ = A^1{}_1$, $A_\times = A^1{}_2$, entonces la solución

$$\vec{z} = \left[\mathbb{I} + \frac{1}{2}A_+ e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}A_\times e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\cdot \vec{z}_0$$

es una combinación lineal de las dos polarizaciones lineales + y × que se muestran en la figura 6.1. También podemos definir $A_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+ - iA_\times)$ y $A_{\mathrm{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+ + iA_\times)$ de forma que

$$\vec{z} = \left[\mathbb{I} + \frac{1}{2\sqrt{2}}A_{\mathrm{L}} e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}A_{\mathrm{R}} e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\cdot \vec{z}_0$$

es una combinación lineal de las dos polarizaciones circulares que se muestran en la figura 6.2.

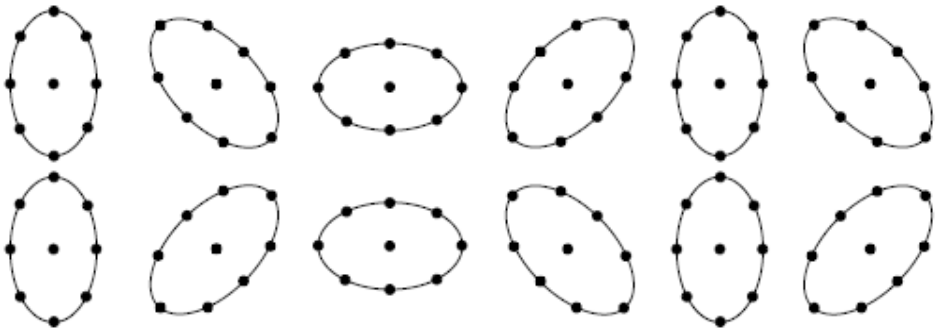


Figura 6.2: Polarizaciones circulares dextrógira y levógira.

6.1.3. Radiación cuadrupolar

Las ondas gravitatorias son perturbaciones del espaciotiempo producidas por campos materiales y están, obviamente, gobernadas por las ecuaciones de Einstein. Teniendo en cuenta que, en el gauge de de Donder, el tensor de Einstein se reduce al laplaciano de la perturbación, las ecuaciones de Einstein se pueden escribir, en este gauge, de la forma

$$\tilde{\partial}_c \tilde{\partial}^c \overline{\gamma}_{ab} = -16\pi G T_{ab}.$$

Para resolverlas haremos uso de las funciones de Green

$$G_{\pm}(x - x') = \frac{\delta(t' - t'_{\pm})}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|},$$

donde $t'_{\pm} = t \mp |\vec{x} - \vec{x}'|$ es el tiempo retardado y avanzado respectivamente. Estas funciones son soluciones de la ecuación

$$\partial_\mu \partial^\mu G_{\pm}(x - x') = -\delta^4(x - x'),$$

por lo que la solución general retardada (es decir, la que describe el efecto de la fuente en un tiempo futuro) de las ecuaciones de Einstein adquiere la forma (EJERCICIO)

$$\overline{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \overline{\gamma}^0_{\mu\nu}(\vec{x}, t) + 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}', t'_+)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

En esta expresión, $\overline{\gamma}^0_{\mu\nu}$ es una solución de vacío que consideraremos nula puesto que supondremos que el único campo gravitatorio presente es el correspondiente a la onda que estamos estudiando. Además, resultará conveniente utilizar la

transformada de Fourier de la perturbación:

$$\overline{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \overline{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x},t)e^{i\omega t}dt = 4G\int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}',\omega)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}e^{i\omega|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'.$$

Es importante notar que solo necesitamos obtener las componentes espaciales $\overline{\gamma}_{ij}$ de la perturbación ya que las restantes $\overline{\gamma}_{0\nu}$ quedan determinadas por la condición de fijación del gauge de de Donder

$$-i\omega\overline{\gamma}_{0\mu} = \partial^i\overline{\gamma}_{i\mu},$$

donde debemos tener en cuenta que no hemos fijado la libertad gauge residual como hicimos en el apartado anterior.

En la zona de radiación, definida por la condición de que la distancia a la fuente sea mucho mayor que su tamaño y que la longitud de onda de la radiación emitida, podemos realizar la aproximación $|\vec{x}-\vec{x}'| \sim |\vec{x}|$. Si además consideramos que la longitud de onda λ es mucho mayor que el tamaño del cuerpo (es decir, de forma que podamos llevar a cabo un desarrollo multipolar), el orden más bajo de aproximación (con $|\vec{x}| \gg \lambda \gg |\vec{x}'|$) nos proporciona la siguiente expresión para la perturbación (EJERCICIO):

$$\overline{\gamma}_{ij}(\vec{x},\omega) = \frac{4Ge^{i\omega|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\int T_{ij}(\vec{x}',\omega)d^3x'.$$

Puesto que la exponencial $e^{i\omega|\vec{x}'|}$ oscila muchas veces antes de que la onda disminuya su amplitud notablemente, esta perturbación se comporta como una onda plana. La ley de conservación del tensor de energía-momento $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y el hecho de que la fuente tenga extensión finita permiten escribir (EJERCICIO)

$$\int T^{ij}d^3x = -\frac{\omega^2}{2}\int T^{00}x^ix^jd^3x.$$

Las velocidades de los movimientos intrínsecos de las fuentes son no relativistas si se cumple la condición $\lambda \gg |\vec{x}'|$ de forma que podemos aproximar T^{00} por la densidad de masa ρ. Si definimos el momento cuadrupolar de masa como

$$q_{ij}(\omega) = \frac{1}{6}\int \rho(\vec{x},\omega)x^ix^jd^3x,$$

obtenemos la expresión (EJERCICIO)

$$\overline{\gamma}_{ij}(\vec{x},\omega) = \frac{2G\omega^2e^{i\omega|\vec{x}|}}{3|\vec{x}|}q_{ij}(\omega), \qquad \overline{\gamma}_{ij}(\vec{x},t) = \frac{2G}{3|\vec{x}|}\ddot{q}_{ij}|_{t'_+}, \tag{6.3}$$

donde $t'_+ = t - |\vec{x}|$ es el tiempo retardado en la zona de radiación.

Notemos que, en el orden más bajo, la radiación gravitatoria es cuadrupolar. No existe radiación dipolar como ocurre en la radiación electromagnética. La razón de esta ausencia estriba en que el análogo gravitatorio al momento dipolar eléctrico $\vec{\mathfrak{p}} = \int \rho \vec{x}\, \mathrm{d}^3x$ es proporcional a la posición del centro de masa, por lo que su primera derivada temporal es proporcional al momento, que es una cantidad conservada. Tampoco existe radiación gravitatoria análoga a la dipolar magnética, ya que el momento dipolar correspondiente es el momento angular total, que también es una cantidad conservada.

6.1.4. Energía gravitatoria

El tensor de energía-momento de cualquier campo es cuadrático en el mismo. Por ello, necesitamos considerar al menos órdenes cuadráticos en su expresión y no solo lineales, como hemos hecho hasta ahora. Definamos, por tanto, $\gamma_{ab} = g_{ab} - \eta_{ab}$ *exactamente y no solo como una expresión hasta primer orden*. Definimos el *tensor de energía-momento efectivo del campo gravitatorio* mediante la expresión

$$t_{ab} = -\frac{1}{8\pi \mathrm{G}}(G_{ab} - G^{(1)}_{ab}),$$

donde $G^{(1)}_{ab}$ es la parte lineal en γ_{ab} del tensor de Einstein. Notemos que, puesto que γ_{ab} contiene todos los órdenes de perturbación y no solo el primero, las ecuaciones de Einstein en vacío no implican que $G^{(1)}_{ab}$ sea necesariamente nulo como ocurre a primer orden. De hecho, podemos reescribir las ecuaciones de Einstein en vacío de la forma

$$G^{(1)}_{ab} = 8\pi \mathrm{G} t_{ab}.$$

Hasta segundo orden, el tensor de energía-momento efectivo del campo gravitatorio adquiere la forma

$$t_{ab} = -\frac{1}{8\pi \mathrm{G}} G^{(2)}_{ab}, \tag{6.4}$$

donde $G^{(2)}_{ab}$ contiene los términos cuadráticos en γ_{ab} del tensor de Einstein, por lo que, en esta expresión, basta considerar solo la perturbación γ_{ab} hasta primer orden.

La interpretación de t_{ab} como un tensor de energía-momento efectivo válido hasta segundo orden es, cuando menos, delicada. Aunque t_{ab} es conservado en el sentido de espaciotiempo plano, no es invariante bajo transformaciones gauge, es decir, bajo cambios de la forma $\gamma_{ab} \to \gamma_{ab} + 2\tilde{\partial}_{(a}\xi_{b)}$. Esta falta de invariancia gauge está directamente relacionada con la dificultad/imposibilidad de definir la densidad local de energía del campo gravitatorio o, en otras palabras, está

relacionada con el carácter no local de la energía del campo gravitatorio. Más explícitamente, si el tensor T_{ab} de un campo material se anula en algún punto del espaciotiempo, entonces el campo se anula en dicho punto (si satisfacen las condiciones de energía). En cambio, si el tensor t_{ab} del campo gravitatorio se anula en un punto, puede ser que hayamos elegido un sistema de referencia de coordenadas normales, pudiendo ser no nulas las fuerzas de marea. Por otro lado, mediante una elección adecuada del sistema de coordenadas en un espaciotiempo plano, podemos hacer que el tensor t_{ab} no se anule, a pesar de que no existan campos gravitatorios (por ser el espaciotiempo plano).

A pesar de estas limitaciones, la energía total asociada a la perturbación γ_{ab} definida mediante la expresión

$$E = \int_{\Sigma_t} t_{00} \mathrm{d}^3x,$$

donde Σ_t es un hiperplano espacial de tiempo constante, es invariante gauge si la métrica $\eta_{ab} + \gamma_{ab}$ es asintóticamente plana y si solo permitimos transformaciones gauge que preserven esta condición (sin demostración).

La ley de conservación $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$ y el teorema de Gauss nos permiten relacionar la potencia con el flujo de energía a través de una superficie S_t en el infinito:

$$P = \dot{E} = \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x \dot{t}_{00} = \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x \partial^i t_{i0} = \int_{S_t} \mathrm{d}^2x t_{i0} k^i,$$

donde k^i es el vector unitario normal a S_t. Sustituyendo la expresión 6.3 para $\gamma_{\mu\nu}$ en la fórmula 6.4, se obtiene, tras largos cálculos, el promedio temporal de la potencia:

$$\langle P \rangle = \frac{\mathrm{G}}{45} \left\langle \left(\dddot{Q}^{ij} \dddot{Q}_{ij} \right) \right\rangle_{t'_+},$$

donde $Q_{ij} = q_{ij} - q^k{}_k \delta_{ij}/3$ es el *momento cuadrupolar sin traza*.

6.2. Detección *(por Eduardo Martín[2])*

La medida directa de radiación gravitatoria es uno de los campos aún abiertos en la astrofísica experimental. Aunque es muy sencillo derivar la ecuación de ondas de la teoría general de la relatividad, su detección experimental aún no se ha logrado. Es, junto con el efecto Lens-Thirring (arrastre de inerciales), uno de los pocos resultados aún no observados experimentalmente de dicha teoría aunque sí se han observado indirectamente. La dificultad en la detección de este

[2]Correo electrónico: martin@imaff.cfmac.csic.es

tipo de radiación estriba en la escasa amplitud de dichas ondas, como veremos en el análisis.

Sin embargo el interés por obtener dichas mediciones y desarrollar las técnicas de construcción de antenas gravitatorias va más allá de la corroboración experimental de la teoría formal: hasta ahora, la única fuente de información que el hombre ha utilizado para analizar el universo ha sido la radiación electromagnética. El análisis de la radiación gravitatoria podría aportar nuevos datos sobre la naturaleza de fenómenos tales como el colapso estelar, la coalescencia de agujeros negros o incluso el origen del universo.

6.2.1. Precisión de los detectores

El primer paso para realizar una medición es estimar el orden de magnitud del observable que queremos medir de tal manera que la precisión de nuestro sensor (y con ella su complejidad) se ajuste a dicho valor esperado. En este apartado determinaremos aproximadamente, en base a resultados que hemos obtenido en los puntos anteriores, el orden de magnitud de la amplitud de la perturbación que queremos medir con un detector de ondas gravitatorias. Obtendremos una estimación a partir de una fuente sencilla extensa y no esférica, correspondiente a dos masas rotantes separadas una distancia $2r$ cuyo momento cuadrupolar q_{ij} se puede obtener a partir de los resultados del ejercicio 6.1. Las derivadas segundas de sus componentes están acotadas por la contribución cuadrupolar a la energía de rotación: $|\ddot{q}_{ij}| \leq 12\Omega^2 M r^2 \equiv 24 E_{\mathrm{q,rot}}$ Por tanto, la perturbación métrica que se transmite en forma de onda a primer orden de aproximación está acotada por

$$|\bar{\gamma}_{ij}| = \left| \frac{2\mathrm{G}}{3c^4} \frac{1}{|\vec{x}|} \ddot{q}_{ij} \right| \leq \frac{16G}{c^4} \frac{E_{\mathrm{q,rot}}}{R} \equiv A,$$

donde R es la distancia de la fuente al detector. Hemos llamado A a la cota superior de las amplitudes (adimensionales) de las perturbaciones métricas. En esta expresión (y en el resto de esta sección) escribiremos las constantes universales explícitamente. Notemos que, en este caso, toda la energía de rotación implicada es de naturaleza cuadrupolar (rotaciones con momento dipolar nulo y cuadrupolar no nulo). En un sistema cuyo centro de masas estuviera rotando o un sistema compuesto por unidades esféricas con una rotación interna, deberíamos eliminar las contribuciones dipolares a la energía de rotación.

Para las fuentes compactas que emiten en la banda de alta frecuencia, es decir, $1 - 10^4$ Hz (coalescencia de estrellas de neutrones y agujeros negros de masa estelar) la energía cinética de rotación no esférica $E_{\mathrm{q,rot}}/c^2$ es del orden de la masa del Sol. Con este dato podemos calcular cómo serían las amplitudes de ondas gravitatorias provenientes de este tipo de fuentes dependiendo de la distancia que nos separe de ellas:

- Una fuente de alta frecuencia colocada a la distancia de Hubble (radio del universo observable): $R \approx 3000$ Mpc $\approx 10^{10}$ a.l. $\Rightarrow A \approx 10^{-22}$.

- Una fuente de alta frecuencia a 200 Mpc (una distancia que aseguraría tener varias coalescencias de estrellas de neutrones al año al alcance del detector): $R \approx 200$ Mpc $\approx 10^{9}$a.l. $\Rightarrow A \approx 10^{-21}$.

- Una fuente de alta frecuencia en el borde del supercúmulo de Virgo: $R \approx 15$ Mpc $\approx 10^{8}$ a.l. $\Rightarrow A \approx 10^{-20}$.

- Una fuente de alta frecuencia en el borde de la Galaxia: $R \approx 20$ Mpc $\approx 10^{5}$ a.l. $\Rightarrow A \approx 10^{-17}$.

Estas estimaciones deben compararse con la precisión del instrumento de medida que vayamos a usar, es decir $\Delta L/L$, donde L es la longitud natural del instrumento de medida y ΔL la variación de longitud que esperamos medir en dicho instrumento. Por tanto la precisión que debería tener nuestro sensor es $\Delta L/L \approx A$.

La tecnología punta actual de interferometría permitiría construir interferómetros que detectan variaciones de la longitud de $\Delta L \approx 10^{-12}$ cm (distancias del orden de los núcleos atómicos), luego podemos estimar la longitud que deberían tener los brazos de un interferómetro con esta precisión para que la perturbación sea medible:

$$L \approx \frac{\Delta L}{A}.$$

Con los resultados anteriores vemos que para nuestra mejor tecnología de interferometría, L debe ser del orden de 1 a 10 km para alcanzar las precisiones necesarias para detectar ondas gravitatorias. Por lo tanto no solo necesitamos interferómetros con precisiones grandes, si no que el detector en sí tiene que tener longitudes características del orden de kilómetros. Estos dos factores hacen que sea muy fácil que la medición se vea alterada por factores externos no deseados.

6.2.2. Antena de Weber

Una vez hemos estimado la precisión necesaria, vamos a obtener una expresión aproximada para estimar la respuesta espectral de un detector (cómo se comporta ante ondas gravitatorias de diferente frecuencia). No entraremos en mucho detalle debido a la complejidad del problema, pero haremos una pequeña aproximación con un modelo muy simplificado.

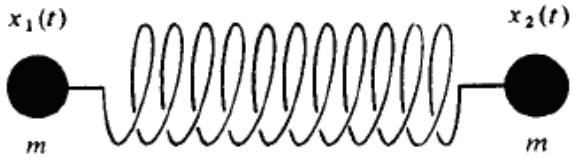


Figura 6.3: Esquema de oscilador resonante sencillo.

6.2.2.1. Modelo de detector

Imaginemos un detector formado por dos masas m unidas por un muelle de constante $m\omega_0^2/2$ y longitud natural l_0. Supondremos que el muelle tiene una constante de amortiguamiento $\omega_0/(2Q)$ donde Q es el *factor de calidad* del oscilador, definido como la inversa de la fracción de energía que el oscilador disipa en un radián de oscilación y que es un parámetro de construcción del sensor. Con este oscilador queremos detectar ondas gravitatorias con un pico de frecuencia muy próxima a la frecuencia natural ω_0 del muelle (oscilador resonante) (figura 6.3). Colocamos las masas en las posiciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Entonces las ecuaciones del movimiento en un espaciotiempo newtoniano son:

$$m\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{Q}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x_1 - x_2 + l_0) = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{Q}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x_2 - x_1 - l_0) = 0.$$

Restamos ambas ecuaciones y definimos la elongación "propia" del muelle mediante la expresión $\xi(t) \equiv l(t) - l_0$, donde $l(t)$ es la separación de ambas masas en un instante t. Entonces, $\xi = \Delta x - l_0$. Bajo estos supuestos, la elongación propia obedece la ecuación de un oscilador armónico amortiguado

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0.$$

Ahora supongamos que llega al oscilador una onda gravitatoria. Analicemos primero que pasa con el sistema de referencia. Una partícula libre en reposo en un sistema inercial local debería seguir en reposo al paso de la onda en dicho sistema de referencia (la onda gravitatoria solo conlleva fuerzas de marea). Esto significa que un sistema de referencia inercial local antes de que la onda llegue sigue siendo inercial después del paso de la misma y valen las mismas coordenadas (en la aproximación de primer orden que estamos utilizando). Suponiendo que los únicos movimientos en el sistema son los producidos por la onda, entonces $\xi = \mathcal{O}(l_0 A) \ll l_0$ de forma que la velocidad de las masas será pequeña y

es válida la aproximación newtoniana en el sistema de referencia inercial local: $m\ddot{x} = F$, donde F es la fuerza de recuperación del muelle.

Podríamos calcular las fuerzas de marea que se ejercerían sobre ambas masas y que cambiarían la elongación del muelle con el formalismo que hemos utilizado hasta ahora, de manera totalmente rigurosa. Sin embargo, por simplicidad en los cálculos, vamos a abordar el problema con un tratamiento más sencillo e igualmente válido (se puede demostrar que el resultado es el mismo haciéndolo de la manera más rigurosa). El planteamiento alternativo que seguiremos es el siguiente: el muelle experimentará una dilatación o contracción de su "longitud propia" debido al paso de la onda gravitatoria, esta contracción o dilatación no debería ser difícil de entender puesto que ambas masas oscilan acercándose y alejándose como efecto de las fuerzas de marea (ya vimos cómo afectaba una onda gravitatoria a un conjunto de masas en el apartado de polarizaciones). En oposición a dicha contracción o dilatación, el muelle ejercerá una fuerza recuperadora proporcional a su "elongación propia".

Si la separación entre las masas es $l(t)$ de forma que $l(0) = l_0$ y la onda viaja en la dirección z entonces la elongación del muelle tendremos que calcularla con la métrica de la forma usual integrando el elemento de línea entre los dos extremos del sensor [notemos que ahora $l(t) \neq x_2(t) - x_1(t)$]:

$$\xi(t) = l(t) - l_0 = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \sqrt{1 + \gamma_{xx}(t)}dx - l_0 = \Delta x(t)\sqrt{1 + \gamma_{xx}(t)} - l_0.$$

Si hacemos una expansión de Taylor hasta primer orden en la perturbación obtenemos

$$\xi(t) = \Delta x(t) + \Delta x(t)\gamma_{xx}(t)/2 - l_0.$$

Como las dos masas estaban en reposo antes del paso de la onda gravitatoria y ésta genera una pequeña perturbación en las posiciones, tendremos que $\Delta x(t) \sim l_0 + \mathcal{O}(\gamma_{xx})$ es la longitud natural del muelle más correcciones de orden superior en la perturbación. Por lo tanto podemos quedarnos en el orden cero de Δx en el segundo sumando para ser consecuentes con la aproximación a primer orden en la perturbación y escribir

$$\xi = \Delta x - l_0 + l_0\gamma_{xx}/2,$$

de forma que la corrección a la variable Δx es

$$\Delta x \approx \xi + l_0 - l_0\gamma_{xx}/2.$$

Podemos hacer el mismo cambio de variable que antes en las ecuaciones de movimiento para ambas masas añadiendo el término de corrección anterior.

Obtenemos así la ecuación de evolución de la elongación propia

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi \approx \frac{1}{2} l_0 \ddot{\gamma}_{xx},$$

que es la ecuación de un oscilador armónico amortiguado, forzado por un término que depende de derivadas segundas de la perturbación, como debía ser, ya que las fuerzas de marea dependen de las segundas derivadas de la métrica.

6.2.2.2. Características espectrales

Supongamos ahora que al detector le llega una onda armónica monocromática de frecuencia ω, es decir,

$$\gamma_{xx} = A \cos \omega t.$$

Entonces la solución de la ecuación de evolución tras un transitorio de vida media $\beta^{-1} = 2Q/\omega_0$ es

$$\xi(t) = K \cos(\omega t),$$

donde la amplitud de la oscilación está dada por

$$K \equiv \frac{l_0 \omega^2 A}{2\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}.$$

La energía del oscilador se puede escribir entonces como

$$E = \frac{1}{4} m(\dot{\xi}^2 + \omega_0^2 \xi^2) = \frac{1}{4} m K^2 \left[\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t)\right],$$

cuyo valor medio sobre un periodo de la onda $2\pi/\omega$ es

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} m K^2 \left(\omega^2 + \omega_0^2\right).$$

Si queremos detectar una fuente de una frecuencia ω conocida, debemos ajustar el detector de manera que su frecuencia natural coincida con la que esperamos medir (resonancia). En ese caso la amplitud es máxima y vale

$$K = \frac{l_0}{2\beta} A \omega.$$

Por tanto, la energía transmitida al detector en resonancia es

$$E = \frac{1}{16} m l_0^2 \omega^2 A^2 \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{16} Q^2 m l_0^2 \omega^2 A^2.$$

Notemos que, en esta expresión, Q y m son parámetros característicos del detector y ω y A caracterizan a la onda gravitatoria. Además, la energía cedida al detector es cuadrática en ω.

La energía cedida al detector es proporcional a la potencia media radiada por la fuente (por medio de la sección eficaz que veremos más adelante y despreciando efectos disipativos, lo que es razonable en el caso de ondas gravitatorias). Como queremos relacionar la expresión de la energía cedida a nuestro detector con la potencia media radiada por la fuente vamos a prescindir de toda dependencia en los parámetros del detector y nos quedaremos solo con aquellos que dependen de la fuente:

$$\langle P \rangle \propto \omega^2 A^2.$$

Dado que, como acabamos de comentar, la energía cedida al detector depende de la radiación a través del producto $\omega^2 A^2$, el flujo recibido será proporcional a esta cantidad. Por otro lado, si llamamos $\mathcal{L}$ a la luminosidad gravitatoria de la fuente (potencia total emitida por unidad de tiempo), el flujo de potencia recibido será $p = \mathcal{L}/4\pi R^2$, donde R es la distancia a la fuente y hemos supuesto que la radiación es isótropa. Por tanto, salvo factores adimensionales del orden de la unidad, un análisis dimensional sencillo nos permite concluir que

$$p = \frac{\mathcal{L}}{4\pi R^2} = \frac{c^3}{G}\omega^2 A^2,$$

lo que implica que podemos escribir la amplitud de la onda recibida A en términos de las cantidades características de la radiación emitida, es decir, su luminosidad y su frecuencia:

$$A = \frac{1}{2\omega R}\sqrt{\frac{\mathcal{L}G}{\pi c^3}}.$$

Hasta ahora, hemos analizado una onda monocromática y, por tanto, de duración finita. Sin embargo, las fuentes astrofísicas (por ejemplo, agujeros negros en coalescencia) solo emiten una señal detectable por nuestros sensores durante un tiempo finito. Consideraremos, por tanto, la situación más realista de un pulso de duración τ, es decir, cuya distribución de frecuencia está centrada en $\omega \sim 2\pi/\tau$. Si llamamos $E_g = \mathcal{L}\tau$ a la energía total radiada por la fuente, podemos estimar la amplitud mediante la expresión

$$A \approx \frac{1}{4R(\pi\tau)^{3/2}}\left(\frac{E_g G}{c^3}\right)^{1/2}.$$

En un colapso gravitatorio que termina formando un agujero negro, la aproximación usual es considerar que τ será aproximadamente el tiempo que tarda la onda gravitatoria en viajar a través de la zona de gravedad intensa, que se asume

como el radio de Schwarzschild $2GM/c^2$:

$$\tau \approx \frac{2GM}{c^3} \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \approx \frac{c^3}{\pi GM},$$

que sustituyendo por masas del orden de la masa del Sol da como resultado frecuencias del orden de los kHz.

Finalmente, podemos estimar la amplitud de la radiación gravitatoria que llega al detector en términos de la energía total radiada, de la masa de la fuente y de su distancia mediante la fórmula

$$A \approx \frac{c^3 {E_g}^{1/2}}{4G^2 R(2\pi M)^{3/2}}.$$

Esta fórmula se emplea para la calibración de detectores para agujeros negros en coalescencia, aunque deducida mediante métodos muy diferentes a los usados aquí.

6.2.2.3. Sección eficaz

Resulta interesante obtener resultados numéricos para comparar el flujo recibido con los flujos característicos electromagnéticos que se reciben de fuentes lejanas de frecuencia comparable (en la banda de radio):

$$p = \frac{c^3}{G}\omega^2 A^2 \simeq 4 \cdot 10^{35}\omega^2 A^2 \ \ \mathrm{Wm}^{-2}.$$

Observamos que para una onda gravitatoria de amplitud $A \simeq 10^{-21}$ (Más allá del supercúmulo de Virgo) con una frecuencia de 1 kHz obtenemos que el flujo de potencia radiado será de 0,4045 Wm^{-2}, que es mucho mayor que los flujos de energía típicos de ondas de electromagnéticas de la misma frecuencia (radio) emitidas a la misma distancia.

Entonces, ¿por qué es tan difícil detectarlas? La principal razón es que las ondas gravitatorias dejan un fracción muy pequeña de su energía en los detectores, como veremos a continuación. Esto tiene una ventaja y un gran inconveniente a la hora de detectarlas: por un lado las ondas no se extinguen por interacción con el medio por el que se propagan pero, por otro lado, hace que los detectores sean muy poco eficientes.

En efecto, la sección eficaz de nuestro detector para la frecuencia óptima, es decir, la de resonancia, es la razón entre la energía depositada en el detector E y el flujo de energía recibido $p\tau$. Si escribimos ambas cantidades en términos de la amplitud A y de la frecuencia resonante ω, obtenemos la expresión para la

sección eficaz en resonancia:

$$\sigma = \frac{E}{p\tau} = \frac{G}{32\pi c^3} Q^2 m l_0^2 \omega.$$

Resulta obvio a la vista de esta fórmula que los detectores más eficientes son los más grandes y pesados y con el mayor factor de calidad.

Para los valores típicos de un detector ($Q \sim 10^6$, $m \sim 1$ t, $l_0 \sim 1$ m, $\omega \sim 1$ kHz)[3], la sección eficaz es del orden de $\sigma \sim 10^{-16}\text{cm}^2$, es decir, que a pesar de tener detectores de metros de longitud, su eficiencia es equivalente al un detector "perfecto" de 1 Å aproximadamente.

6.2.2.4. Límites de resolución

La resolución de los detectores se ve afectada por dos procesos físicos fundamentales: el ruido térmico y el ruido cuántico.

Las fluctuaciones térmicas provocan movimientos aleatorios en el detector. Sin embargo, si el factor de calidad Q es alto, el coeficiente de disipación $\beta = \omega_0/(2Q)$ es pequeño y, por tanto, el grado de excitación de los modos térmicos de vibración será también pequeño. Por otro lado, si el coeficiente de disipación es pequeño, la energía de vibración debida a las ondas gravitatorias se disipará lentamente ya que la vida media β^{-1} es grande.

Un problema importante surge cuando nos planteamos que las distancias que esperamos medir van a ser muy pequeñas: la oscilación inducida en el detector podría ser equivalente a menos de un cuánto de vibración $\hbar\omega$. Es fácil ver que para antenas de Weber típicas, el número de cuantos de vibración $E/(\hbar\omega) \sim 10^3$ no es demasiado grande. De hecho, en detectores mecánicos más realistas el límite cuántico supone un límite real de resolución[4].

6.2.3. Detectores interferométricos

Lejos de dar una explicación completa, nos limitaremos a describir los principios básicos de funcionamiento de un detector interferométrico emplazado en la Tierra. Si bien existen detectores basados en interferómetros de Fabry-Perot, de Sagnac, interferómetros de alta reflectancia (para evitar fluctuaciones térmicas del detector por absorción de la luz láser), etc., el diseño más sencillo de este tipo de detectores está basados en los interferómetros de Michelson.

[3] E. Coccia, *Class. Quantum. Grav.* **20** (2003) S135; *Resonant-mass detectors of gravitational waves in the short- and medium-term future.*

[4] R.P. Giffard, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 2478; *Ultimate sensitivity limit of a resonant gravitational wave antenna using a linear motion detector.*

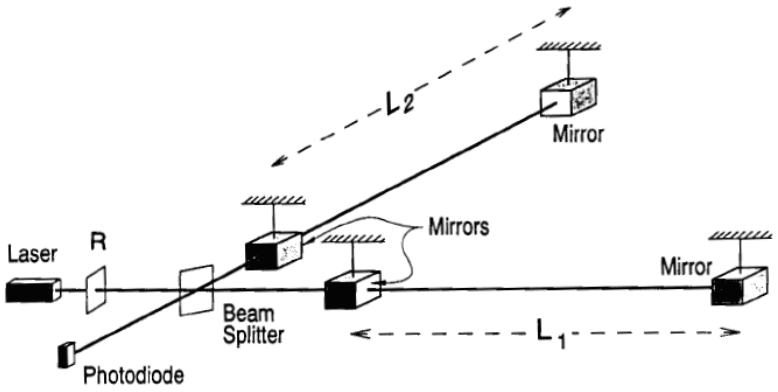


Figura 6.4: Esquema de antena gravitatoria basada en el interferómetro de Michelson.

El sistema consta de cuatro grandes masas suspendidas en un soporte aislado de vibraciones y un sistema óptico de láseres y espejos colocados según el esquema de la figura 6.4. Los dos brazos del detector tienen que tener aproximadamente la misma longitud $L_1 \simeq L_2 = L$.

Cuando una onda gravitatoria (de frecuencia alta comparada con la frecuencia natural de péndulo de las masas suspendidas) atraviesa el detector, se acortan y se alargan las distancias de ambos brazos de forma opuesta, produciéndose un cambio en la magnitud $\Delta L = L_1 - L_2$ que variará el camino óptico de la luz láser que recorre cada uno de los brazos de forma diferente. Por tanto, el patrón de interferencia detectado sufre cambios periódicos con el tiempo proporcionales a la variación de distancias relativas $\Delta L(t)/L$. Como estamos midiendo diferencias relativas entre caminos ópticos, no hay problemas con el principio de incertidumbre, puesto que no estamos midiendo longitudes propias absolutas de objetos materiales. Puesto que estas medidas apenas alteran los observables medidos, se mejora notablemente el límite cuántico de los detectores mecánicos y, de hecho, el límite cuántico de los detectores interferométricos viene dado por la fluctuación en el número de fotones por unidad de tiempo de las fuentes láser.

Pese a lo sencillo de la explicación anterior, la realidad es que, a la hora de construir detectores, existe una gran variedad de dificultades técnicas debidas principalmente a la longitud característica de los brazos (que es del orden de kilómetros), al ruido intrínseco y las perturbaciones externas[5]. Entre estas últimas cabe destacar las perturbaciones sísmicas para los detectores terrestres (cuya amplitud es unas 10^{12} mayores que las señales de origen gravitatorio) y el impacto de rayos cósmicos y el viento solar para los colocados en el espacio.

[5]Ver, por ejemplo, la referencia "L. Ju, D.G. Blair y C. Zhao, *Rep. Prog. Phys.* **63** (2000) 1317; *Detection of gravitational waves*".

Los proyectos actuales para la detección de ondas gravitatorias más prometedores son los siguientes:

- LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory), http://www.ligo.caltech.edu,
- EGO/VIRGO (European Gravitational Observatory), http://www.ego-gw.it,
- LISA (Laser Interferometer Space Antenna), http://lisa.nasa.gov.

6.3. Ejercicios

6.1 Una de las estrellas del sistema binario PSR 1913+16 es un pulsar, por lo que su órbita puede ser determinada midiendo las señales que emite. De las pequeñas variaciones en la periodicidad de la frecuencia del pulsar por efecto Doppler podemos calcular su periodo: $T = 27906{,}980895 \pm 0{,}000002$ s. Se observa que este periodo no es totalmente constante sino que decrece a un ritmo dado por $\dot{T} = -(2{,}427 \pm 0{,}026) \cdot 10^{-12}$. Además, a partir del patrón de frecuencias del pulsar, podemos determinar el ángulo entre el periastro y la línea de visión, observando que la posición del periastro varía en una cantidad igual a $\dot{\varphi} = 4{,}22659 \pm 0{,}00004$ grados por año. También se puede obtener a partir de este patrón la excentricidad de la órbita $e = 0{,}6171313 \pm 0{,}0000010$, que es bastante alta, así como otros parámetros orbitales y el desplazamiento al rojo gravitatorio. Suponiendo que toda la precesión del periastro es debida a la curvatura del espaciotiempo, es posible determinar las masas de las dos estrellas de neutrones que componen el sistema binario:

$$M_1/M_\odot = 1{,}442 \pm 0{,}003, \qquad M_2/M_\odot = 1{,}386 \pm 0{,}003.$$

Referencias: J.M. Weisberg et al., *Scientific American,* October 1981, p.66; J.H. Taylor et al., *Nature* **277** (1979) 437; J.H. Taylor and J.M. Weisberg, *Astrophysical Journal* **345** (1989) 434.

a) Órbitas

a1. En el límite newtoniano, las dos estrellas del pulsar siguen órbitas elípticas keplerianas. Probar que la energía total del sistema está dada por la ecuación

$$E = -\frac{GM\mu}{2a},$$

donde μ es la masa reducida, M es la masa total y a es el semieje mayor de la elipse.

a2. Demostrar que, la órbita de una masa de prueba alrededor de un cuerpo de masa M está dada por

$$u'^2 + u^2 = \bar{E} + 2GMu/J^2 + 2GMu^3,$$

donde $u = 1/r$, la prima denota la derivada azimutal y J y $\bar{E}$ son constantes de integración. J se puede interpretar como el momento angular y $\bar{E}$ está relacionada con la energía de la órbita.

a3. En el caso del pulsar PSR 1913+16, ambas masas son del mismo orden de magnitud. Justificar la validez de esta ecuación en este caso.

a4. Debido a la corrección relativista $2GMu^3$, la órbita no es elíptica sino que tiene una precesión. Demostrar que la precisión entre sucesivos periastros está dada por

$$\Delta\varphi = 3\pi G M(1/r_a + 1/r_p),$$

donde r_p y r_a son los valores de r en el periastro y en el apoastro. Demostrar que

$$\dot{\varphi} = \frac{6\pi}{1-e^2}(2\pi G M/T)^{2/3}T^{-1}.$$

Calcular este valor y compararlo con el observacional.

a5. Demostrar que la variación observada en el periodo implica una pérdida de energía del sistema binario dada por:

$$\dot{E} = \frac{GM\mu\dot{T}}{3aT}.$$

Esta pérdida de energía puede ser explicada por radiación gravitatoria, como veremos en el resto del problema.

b) El momento cuadrupolar de la órbita

b1. Demostrar que el momento cuadrupolar del pulsar es $\mathfrak{Q} = 3\mu r^2\mathfrak{J}/2$, donde

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 1/3+\cos(2\phi) & \operatorname{sen}(2\phi) & 0 \\ \operatorname{sen}(2\phi) & 1/3-\cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

b2. Demostrar que

$$\mathfrak{J}''' = -4\mathfrak{J}', \qquad \operatorname{Tr}(\mathfrak{J}^2) = 8/3, \qquad \operatorname{Tr}(\mathfrak{J}\mathfrak{J}') = 0, \qquad \operatorname{Tr}(\mathfrak{J}'^2) = 8.$$

b3. Demostrar que $\ddot{\mathfrak{Q}} = 3\mu[GMa(1-e^2)]^{3/2}[u^2(u'u''-uu''')\mathfrak{J} - 2u^3(u''+u)\mathfrak{J}']$.

c) Variación del periodo por emisión de ondas gravitatorias para órbitas circulares

c1. Supongamos, de momento, que podemos despreciar la excentricidad. Entonces, demostrar que la energía radiada mediante ondas gravitatorias es

$$\dot{E}_{\mathrm{rg},e=0} = \frac{32G\mu^2a^4\Omega^6}{5} = \frac{32G^2\mu^2M^3}{5a^5},$$

donde Ω es la velocidad angular de la órbita.

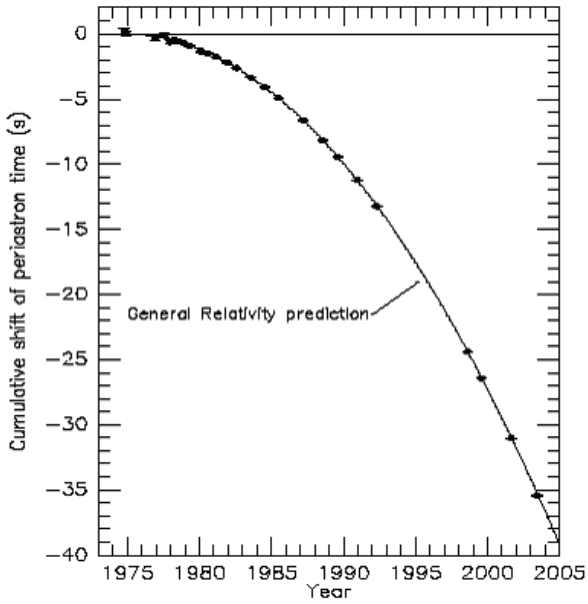


Figura 6.5: Variación acumulada del instante del periastro (en segundos) en función del tiempo (en años).

c2. Demostrar que, si la pérdida de energía se debe exclusivamente a radiación gravitatoria,

$$\dot{T}_{e=0} = -(192\pi/5)\mu M^{2/3}(2\pi G/T)^{5/3} = -2{,}025 \cdot 10^{-13},$$

valor diez veces menor que el observado.

d) Variación del periodo por emisión de ondas gravitatorias para órbitas excéntricas

Si la órbita es excéntrica, la potencia radiada $\dot{E}_{\rm rg}$ depende del tiempo.

d1. Demostrar que, si introducimos la dependencia temporal de la velocidad angular en la ecuación del apartado c1, entonces el promedio temporal de la potencia emitida por radiación gravitatoria sobre un periodo orbital es

$$\begin{aligned}\langle \dot{E}_{\rm rg}\rangle &= \frac{32G^4\mu^2M^3}{5}a^3(1-e^2)^3\langle u^8\rangle = \frac{16G^4\mu^2M^3}{5\pi}a(1-e^2)^{5/2}\int_0^{2\pi} u(\phi)^6 d\phi \\ &= \dot{E}_{{\rm rg},e=0}\cdot(1+15e^2/2+45e^4/8+5e^6/16)(1-e^2)^{-7/2},\end{aligned}$$

de modo que $\langle \dot{T}\rangle = 25{,}1\cdot \dot{T}_{e=0}$.

Este resultado es 2,5 veces mayor que el observado. Sin embargo, indica que la excentricidad es importante. Por otro lado, ha sido obtenido intro-

duciendo la dependencia temporal de la potencia radiada de una forma incompleta. Hagamos ahora el cálculo correcto.

d2. Calcular $\langle \dot{E}_{\rm rg} \rangle$ y demostrar que $\dot{T} = f(e)\dot{T}_{e=0}$ donde

$$f(e) = 1 + 73e^2/24 + 37e^4/96)(1 - e^2)^{-7/2} = 11{,}86,$$

de forma que $\dot{T}/\dot{T}_{\rm obs} = 0{,}99$.

e) Ajuste con los datos observacionales

Demostrar que la curva que se ajusta a los datos observacionales de la figura 6.5 está determinada por el valor predicho teóricamente para $\dot{T}$.

Tema 7

Relatividad computacional *(por David Yllanes[1])*

7.1. Relatividad numérica
- 7.1.1. El problema
- 7.1.2. Formalismo ADM–BSSN
- 7.1.3. Formulaciones armónicas
- 7.1.4. Colisión de agujeros negros

7.2. Relatividad algebraica
- 7.2.1. Los escalares del tensor de Riemann

[1]Correo electrónico: yllanes@lattice.fis.ucm.es.

La importancia de los ordenadores como herramienta fundamental en todas las áreas de la física está fuera de toda duda. En este tema examinaremos brevemente qué tipo de aplicaciones tienen en el campo de la relatividad general.

En primer lugar, consideraremos cómo se puede plantear la resolución numérica de las ecuaciones de Einstein. Recordemos que éstas son no lineales y, en general, son lo suficientemente complicadas para que solo se conozcan unas pocas soluciones exactas. Muchas veces es posible trabajar analíticamente a partir de estas soluciones y diversas aproximaciones adicionales, pero surgen varios problemas en los que se hace necesario otro enfoque. Como ejemplo, consideremos la detección de ondas gravitatorias, tratada en el tema 6. Veíamos entonces que, desde el punto de vista experimental, era éste un problema muy desafiante, de modo que la cantidad de fenómenos con posibilidades razonables de ser observados se reducía mucho y nos veíamos obligados a considerar casos extremos, como los últimos momentos de una colisión de agujeros negros. Esto a su vez genera un problema teórico considerable, pues para poder interpretar dichas observaciones (e incluso para maximizar la probabilidad de detección) necesitamos contar de antemano con una «plantilla» con la que comparar nuestras mediciones. Ahora bien, en estas condiciones, todas las aproximaciones analíticas fallan y la única opción es resolver las ecuaciones de Einstein completas mediante una simulación numérica. Otros campos que requieren este tipo de tratamiento son, por ejemplo, las órbitas de acreción más internas alrededor de estrellas de neutrones o la evolución de supernovas. En §7.1, veremos cómo se plantean las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales adecuado para la resolución numérica.

Por otro lado, al trabajar con las ecuaciones de Einstein, enseguida aparecen ecuaciones de aspecto inofensivo en notación tensorial, pero que se vuelven muy largas al expandirlas en componentes. Sin embargo, a la hora de calcular resultados concretos esta expansión es totalmente necesaria. La simplificación y manejo de las ecuaciones que así aparecen, que manualmente suponen un alto riesgo de error y un enorme gasto de tiempo, son el objetivo del cálculo algebraico simbólico. Con programas dedicados que sean capaces de aprovechar las simetrías presentes para dejar las fórmulas en su manera idónea, es posible hoy en día abordar problemas analíticos que hasta hace poco suponían un esfuerzo prohibitivo. El objetivo de §7.2 es describir brevemente estas técnicas.

7.1. Relatividad numérica

En esta sección, introduciremos las formulaciones principales de las ecuaciones de Einstein para el trabajo numérico y veremos un ejemplo de aplicación en la colisión y coalescencia de agujeros negros. En primer lugar, necesitamos una

definición previa: se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales está *bien puesto* si se cumplen las siguientes propiedades:

- Existe una solución.
- La solución es única.
- La solución depende de manera continua de los datos iniciales, en alguna topología razonable.

Este concepto se debe a Hadamard y es crucial para el cálculo numérico. Veamos la razón. Consideremos, por simplicidad, un problema de valores iniciales de primer orden en una dimensión,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t,y), \qquad a \leq t \leq b, \qquad y(a) = \alpha.$$

Para que este problema esté bien puesto, es necesario que la solución $y(t)$ sea única. Además, deben existir dos constantes $\epsilon_0 > 0$ y $k > 0$ tales que, para cualquier ϵ con $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ y siempre que $\delta(t)$ sea continuo con $|\delta(t)| < \epsilon$ en $[a,b]$ y $|\delta_0| < \epsilon$, el nuevo problema de valores iniciales

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f(t,z) + \delta(t), \qquad a \leq t \leq b, \qquad z(a) = \alpha + \delta_0,$$

tenga una solución única $z(t)$ tal que $|z(t) - y(t)| < k\epsilon$ para todo $t \in [a,b]$.

El problema para la función $z(t)$ se denomina *problema perturbado* y supone considerar la posibilidad de que exista un error $\delta(t)$ en la ecuación diferencial, además de un error δ_0 en la condición inicial.

Está clara la importancia de este concepto para un método numérico. En efecto, un ordenador siempre introducirá un cierto error tanto en la ecuación como en sus condiciones de contorno, debido a la precisión finita con la que cuenta. Que un problema esté bien puesto es una condición necesaria (pero no una garantía) para que su implementación numérica sea estable.

Ejemplos típicos de problemas bien puestos son el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace o la ecuación del calor para unas ciertas condiciones iniciales. La ecuación del calor invertida, en la que se intenta deducir la distribución de temperaturas en el pasado a partir de la situación final, es, por el contrario, un problema mal puesto.

No entraremos aquí en las condiciones que se deben cumplir para asegurar esta propiedad para un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Nos bastará con tener en cuenta que, para las ecuaciones lineales, depende solo de los términos en las derivadas de mayor orden, lo que se conoce como *parte principal* del sistema. En general, un sistema no lineal estará bien puesto si todas sus linealizaciones lo están.

7.1.1. El problema

Como vimos en § 3.3, aunque las ecuaciones de Einstein tienen solo diez funciones incógnita (las componentes de la métrica), aparecen muchas más ecuaciones de las que solo unas pocas son verdaderas ecuaciones físicas de evolución. En general, para resolver el problema de valores iniciales debemos definir una cierta foliación del espaciotiempo y preocuparnos por

- condiciones iniciales,
- condiciones de contorno,
- condiciones gauge:
  - sistema de coordenadas en $t = 0$,
  - evolución de las coordenadas,
- ligaduras (hamiltoniana y del momento).

Los dos primeros puntos son comunes a todos los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, pero los últimos introducen complicaciones matemáticas adicionales. Es en la elección del gauge en la que se diferencian los diferentes formalismos. Aquí veremos dos tipos de condiciones gauge:

- tipo ADM (h_{ij}, K_{ij}, N, N^i),
- formulaciones armónicas.

7.1.2. Formalismo ADM–BSSN

Partimos de la descomposición $3 + 1$ de la métrica vista en el tema 5:

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\mathrm{d}t^2 + h_{ij}\,(\mathrm{d}x^i + N^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + N^j\mathrm{d}t),$$

donde N es la función lapso y N^i el vector desplazamiento. Considerando un problema en el vacío, por simplicidad, tenemos ecuaciones de evolución físicas para la métrica espacial h_{ij} y la curvatura extrínseca K_{ij}:

$$\dot{h}_{ij} = -2NK_{ij}, \qquad \dot{K}_{ij} = -\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j N + N(\bar{R}_{ij} - 2K_{il}K^l{}_j + KK_{ij}),$$

donde, recordemos, D_i es la derivada covariante compatible con h_{ij} y $\bar{R}_{ij}$ el tensor de Ricci tridimensional. En estas dos ecuaciones es donde entran las condiciones iniciales. Además, tenemos las ligaduras

$$\mathscr{S} = \bar{R} - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 0, \qquad \mathscr{D}_i = \mathrm{D}_j K^j{}_i - \mathrm{D}_i K = 0.$$

Finalmente debemos fijar un gauge. En el tema 5, considerábamos condiciones sobre las variables canónicas y veíamos que, una vez fijado con ellas el gauge, los valores de N y N^i quedaban totalmente determinados. En relatividad numérica, se suele utilizar un enfoque algo distinto. Se parte de una elección adecuada de N y N^i como funciones de h_{ij} y K_{ij}, ya en forma explícita o en forma de ecuaciones diferenciales adicionales (esto último se conoce como *live gauge*). Hecho esto, se comprueba que los valores tomados son consistentes con el resto de condiciones. Es importante notar que las ecuaciones para la función lapso y el vector desplazamiento no vienen dadas por la física del problema, sino que se pueden elegir con cierta libertad (respetando las ligaduras).

Con todo esto, el problema ya está en una forma adecuada para su discretización e implementación numérica. Sin embargo, al llevar a cabo los cálculos, se comprobó que no era posible lograr una solución estable. La razón es que, en el ordenador, las ligaduras solo se satisfacen salvo errores de redondeo, por lo que el sistema debe estar bien puesto para datos iniciales arbitrarios, que no cumplan necesariamente las ligaduras. Sin embargo, es posible ver que, para las elecciones de gauge habituales, la parte principal no cumple las condiciones adecuadas: el formalismo ADM conduce a un problema mal puesto. Esto se traduce en que las soluciones explotan a altas frecuencias. Curiosamente, para este problema, cuanto mejor sea el ordenador, peor es la solución. De hecho, en los primeros cálculos, no se observaba problema alguno y, solo al mejorar la resolución de la malla empleada, entraron en juego las altas frecuencias conflictivas.

Como puede imaginarse, esta situación es inaceptable. El remedio más popular lo constituye el llamado formalismo BSSN, descubierto independientemente por Baumgarte y Shapiro y por Shibata y Nakamura a mediados de los noventa. No es éste el lugar para entrar en detalles[2], así que nos limitaremos a decir que la modificación más relevante hecha por estos autores —además de reparametrizar las variables estudiadas— fue la de añadir un término proporcional a la ligadura de momento en el lado derecho de las ecuaciones ADM de evolución. Aunque esta modificación parezca no añadir nada, en realidad, sirve para modificar la parte principal y conseguir un problema bien puesto.

7.1.3. Formulaciones armónicas

Acabamos de ver cómo se pueden plantear las ecuaciones de Einstein como un sistema de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio por medio del formalismo BSSN. En esta sección, mencionaremos otra elección de gauge posible, que conduce a un sistema de segundo orden en el espacio y en el tiempo.

[2]Ver las referencias "W. Baumgarte y S.L. Shapiro, *Phys. Rev.*, **D59** (1998) 024007" y "M. Shibata y T. Nakamura, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 5428".

En el trabajo analítico, es habitual imponer condiciones del tipo

$$\Box x^\mu = 0,$$

que se conoce como *gauge armónico*[3]. Recordemos que, en relatividad general, las coordenadas x^μ no son un campo vectorial sino cuatro campos escalares. Aunque esta elección simplifique mucho algunas fórmulas, en la práctica, no resulta viable para el trabajo numérico, ya que se observa que desarrolla singularidades coordenadas en un tiempo finito. Esto provocó que durante mucho tiempo se abandonase este tipo de tratamientos. A finales de los noventa, se sugirió modificar esta condición por un *gauge armónico generalizado*,

$$\Box x^\mu = H^\mu,$$

donde H^μ son funciones de la métrica y sus primeras derivadas. Este formalismo permitió, en el año 2005, conseguir las primeras evoluciones estables para la colisión de agujeros negros, como comentaremos en la próxima sección.

7.1.4. Colisión de agujeros negros

Como mencionábamos al inicio de este tema, la colisión de agujeros negros es uno de los fenómenos más prometedores para la detección de ondas gravitatorias. La observación de la radiación emitida en los últimos momentos de este proceso supondría una comprobación experimental sin precedentes para la relatividad general en el régimen de campo intenso. No es de extrañar, por tanto, que desde hace décadas se haya dedicado una cantidad considerable de tiempo y recursos a resolver este problema.

El estudio de la evolución de un sistema binario de agujeros negros empieza con cálculos analíticos perturbativos que nos permiten acercarnos hasta las últimas órbitas previas a la coalescencia. Sin embargo, la fase más interesante es justo la siguiente ya que es en ella cuando se generan las ondas gravitatorias con posibilidades de ser detectadas. Es, por tanto, preciso disponer de un método numérico que permita obtener la forma de las ondas en estos últimos momentos. Los primeros pasos en este campo datan de mediados de los setenta y se deben a Smarr, quien consideró una colisión frontal, sin momento angular. Un caso tridimensional más general desafió todos los intentos de resolución numérica durante muchos años; solo en 1999 se consiguió simular una pequeña fracción de la colisión y hasta el año 2004 no fue posible conseguir una órbita completa. Pero una órbita no era suficiente, así que el panorama hace unos años se

[3]En tema 3.3, llamábamos gauge armónico a $\partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu}\right) = 0$, se puede ver que las dos condiciones son equivalentes.

presentaba bastante difícil. Sin embargo, a mediados del año 2005 se consiguió dar un salto cualitativo y simular el proceso completo, hasta la coalescencia y extracción de ondas gravitatorias. Este avance se debió, en parte, a los desarrollos teóricos comentados en § 7.1.2 y § 7.1.3 y, en parte, también a la introducción de nuevos métodos numéricos sofisticados. Mencionaremos aquí algunos de los ingredientes fundamentales:

- Se utilizó el formalismo armónico generalizado de § 7.1.3.
- Se escinden las singularidades del interior de los agujeros negros de forma dinámica, esto es, se sigue la pista al centro del agujero negro y se elimina un pequeño volumen a su alrededor, diferente en cada paso.
- Se toma un sistema de coordenadas compactificado, de modo que el borde del retículo esté en el infinito espacial y las condiciones de contorno se puedan tomar de forma exacta.
- AMR (Adaptative Mesh Refinement). Este método consiste en aumentar la resolución de la malla utilizada de forma dinámica, para tener más precisión en las zonas más difíciles.

Todos estos elementos fueron necesarios para que Pretorius[4] fuese capaz de simular la evolución completa del sistema. Unos meses después, se reprodujeron los mismos resultados en el marco del formalismo BSSN. Se observó de este modo que dos agujeros negros de masa M_0, separados inicialmente una distancia propia de $16{,}6GM_0$ y con pequeñas excentricidades orbitales acababan fusionándose en un solo agujero negro de masa $M_f \approx 1{,}90M_0$ y momento angular $J \approx 0{,}70GM_f^2$ al cabo de poco más de una órbita completa. Alrededor de un 5 % de la masa inicial se radiaba en forma de ondas gravitatorias. Puede verse la animación correspondiente a esta simulación en http://www.nasa.gov/centers/goddard/universe/gwave.html.

A pesar de lo dicho aquí, el sistema completo más general dista mucho de estar totalmente resuelto. Un problema concreto interesante es el del acoplo espín-órbita. Se sabe que no pueden existir agujeros negros con $J > GM^2$ [5]. Si partimos de un sistema binario con momento angular muy grande (incluido el orbital), los agujeros negros deben dar muchas vueltas radiando momento angular hasta poder colisionar. Sin embargo, los mismos agujeros negros con los espines compensados colapsan inmediatamente. No se sabe por qué ocurre esto.

[4] F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005) 121101.

[5] En el ejercicio 4.9, veíamos un resultado parecido para la carga eléctrica. El razonamiento con el momento angular es análogo, utilizando la métrica de Kerr en lugar de la de Reissner-Nordström. Para una explicación más detallada puede verse la referencia [1].

7.2. Relatividad algebraica

Como apuntábamos al inicio de este tema, muchas veces es necesario llevar a cabo cálculos tensoriales exactos muy largos. El problema es especialmente acusado en algunas áreas concretas de la relatividad general:

- Expansiones perturbativas a órdenes altos (por ejemplo, las llamadas *parametrizaciones postnewtonianas*[6]).
- Manipulación de polinomios del tensor de Riemann (*cf.* § 7.2.1) o tensores de Bel-Robinson. Hemos visto durante el curso que en general no es posible definir un tensor de energía-momento para el campo gravitatorio. Sin embargo, se puede construir un tensor totalmente simétrico a partir del tensor de Weyl en una forma análoga a como se forma el tensor T_{ab} del electromagnetismo a partir de F_{ab}. Este tensor,

  $$T_{abcd} = C_{aecf}C_b{}^e{}_d{}^f + \frac{1}{4}\epsilon_{ae}{}^{hi}\epsilon_b{}^{ej}{}_k C_{hicf}C_j{}^k{}_d{}^f,$$

  llamado de Bel-Robinson, comparte ciertas propiedades interesantes con los tensores de energía-momento que hemos utilizado.
- Clasificación de las métricas.
- Expansión de las ecuaciones de Einstein en componentes (generación de programas para relatividad numérica).

De este tipo de situaciones, se encarga la *computación algebraica*. Su característica fundamental, en contraste con el cálculo numérico, es que en ella no hay ningún truncamiento de información, lo que conlleva un mayor esfuerzo computacional. Un ejemplo característico es la resolución de sistemas de miles de ecuaciones lineales cuyos coeficientes y soluciones son enteros de unas pocas cifras. En este tipo de situaciones, los números intermedios que surgen al llevar a cabo la eliminación gaussiana típicamente crecen hasta alcanzar cientos de cifras.

Otra limitación intrínseca interesante de la computación algebraica viene dada por el *teorema de Richardson*. Sea $\mathcal{R}$ la clase de expresiones generadas por

- Los números racionales, π y $\log 2$.
- La función identidad, $f(x) = x$.

[6] Puede verse una introducción al formalismo postnewtoniano en la referencia [4]. Para una presentación más moderna puede consultarse "C.M. Will, *Living Rev. Relativity*, **9** (2006) 3, http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3".

- Las funciones $\operatorname{sen} x$, $|x|$ y e^x.
- Las operaciones de suma, multiplicación y composición.

Entonces existen expresiones $E \in \mathcal{R}$ para las que la condición $E \equiv 0$ es indecidible.

Podría parecer con todo esto que el cálculo simbólico está condenado al fracaso, ya que ignorar cuándo una expresión es idénticamente nula equivale a no poder determinar si dos son iguales. Afortunadamente, para clases muy grandes de expresiones se puede definir el concepto de *forma canónica*. Consideremos como ejemplo el caso de los polinomios. Éstos pueden presentarse de muchas maneras (factorizados, agrupados por potencias de una de sus variables, etc.) pero existe claramente un algoritmo para decidir si dos son iguales. En efecto, no tenemos más que desarrollar totalmente todos los términos y, a continuación, comparar uno a uno los coeficientes de cada potencia. Nótese que este proceso de *canonicalización* no implica simplificación: la forma canónica de una determinada expresión no es necesariamente la más sencilla; sí es, sin embargo, objetiva.

En relatividad, las expresiones que nos interesan son de carácter tensorial y las formas canónicas se reducen, básicamente, a una elección para la ordenación de los índices de entre todas las permitidas por las simetrías de la expresión considerada. De una forma más precisa, las propiedades de simetría de una expresión con n índices están representadas por un cierto subgrupo del grupo de permutaciones S_n; la tarea del canonicalizador consiste en identificar dicho subgrupo, dividirlo en *cosets* y elegir un representante de cada uno. En general, las simetrías se pueden clasificar en dos tipos:

- Monotérmino, por ejemplo, $R_{abcd} = -R_{bacd}$.
- Multitérmino, por ejemplo, $R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$.

Hoy en día, se cuenta con algoritmos muy rápidos para tratar las primeras, incluso para expresiones muy grandes, mientras que sigue siendo muy difícil aplicar las segundas en tiempo real. Los algoritmos encargados de canonicalizar las expresiones tensoriales de acuerdo con su simetría constituyen el elemento fundamental de todos los paquetes de relatividad algebraica. Con una implementación sofisticada, se puede convertir un problema que, en principio, parece crecer de forma factorial con el número de índices en un algoritmo con crecimiento polinómico.

Actualmente, los programas de referencia dentro de la relatividad son *GRTensorII* para el cálculo por componentes y *MathTensor* para el cálculo abstracto. Otra opción reciente es el proyecto *xAct*, que cuenta como puntos fuertes con

algoritmos muy avanzados y eficientes de canonicalización y la posibilidad de tratar simultáneamente los dos tipos de problemas[7].

7.2.1. Los escalares del tensor de Riemann

Hemos visto a lo largo de este curso que el tensor de Riemann desempeña un papel de enorme importancia en nuestro conocimiento de la gravitación ya que contiene toda la información invariante y local sobre el espaciotiempo. Este hecho, unido a que las propiedades algebraicas de este tensor son muy complicadas, hace que manipular expresiones que lo contengan sea tan imprescindible como difícil. En esta sección, comentaremos el problema de manejar monomios del tensor de Riemann y sus derivadas covariantes con los índices totalmente contraídos. Estos invariantes escalares del tensor de Riemann tienen mucha utilidad tanto en matemáticas como en física. Ejemplos de aplicaciones son el estudio de singularidades o la renormalización de la acción gravitatoria. En este último caso, aparecen productos de varios tensores de Riemann al calcular correcciones con varios *loops* a la matriz S[8]. El objetivo es claro: proporcionar un algoritmo capaz de reducir a una forma canónica cualquier polinomio escalar de tensores de Riemann y sus derivadas. Por ejemplo, querríamos poder demostrar la siguiente relación:

$$\epsilon^{abcd} R_{ab}{}^{ef} R_{cef}{}^{g} R_{d}{}^{hij} R_{gi} R_{hj} + \frac{(\epsilon^{abcd} R_{ab}{}^{ef} R_{cdef})(R^{ghij} R_{gi} R_{hj})}{8} = 0.$$

Recordando §1.2.3, sabemos que el tensor de Riemann de una conexión métrica tiene $n^2(n^2-1)/12$ componentes independientes. Ahora bien, los valores de estas componentes dependen del sistema de coordenadas elegido y no solo de las propiedades intrínsecas de la variedad estudiada. Es posible demostrar (EJERCICIO) que las transformaciones de coordenadas eliminan $n(n-1)/2$ grados de libertad de modo que solo $n(n-1)(n-2)(n+3)/12$ componentes tienen carácter invariante. A partir de ellas, se pueden construir infinitos monomios escalares de tensores de Riemann. En esta sección, veremos las diferentes propiedades que hay que tener en cuenta a la hora de manejar este tipo de expresiones.

Las propiedades puramente algebraicas del tensor de Riemann están recogidas en las siguientes simetrías:

A) Monotérmino: $R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab}$.

B) Cíclica: $R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$.

[7] *GRTensorII*, P. Musgrave *et al.*, http://grtensor.phy.queensu.ca. *MathTensor*, L. Parker y S. Christensen, http://smc.vnet.net/MathTensor.html. *xAct*, J.M. Martín-García *et al.*, http://metric.iem.csic.es/Martin-Garcia/xAct/.

[8] Ver, por ejemplo, "M. Goroff y A. Sagnotti, *Nucl. Phys. B* **266** (1986) 709 ".

Si incluimos derivadas covariantes y tenemos en cuenta la definición del tensor de Riemann, aparecen dos nuevos tipos de relaciones:

C) Identidad de Bianchi: $\nabla_e R_{abcd} + \nabla_b R_{eacd} + \nabla_a R_{becd} = 0$.

D) Conmutación de derivadas. Ejemplo:

$$\nabla_e \nabla_f R_{abcd} = \nabla_f \nabla_e R_{abcd} - R_{agcd} R_{feb}{}^g - R_{abgd} R_{fec}{}^g - R_{abcg} R_{fed}{}^g - R_{gbcd} R_{fea}{}^g .$$

Al trabajar con expresiones con un número suficientemente alto de índices aparecen aún más relaciones:

E) Relaciones dimensionalmente dependientes, también llamadas identidades de Lovelock[9]. Son consecuencia de que, en una variedad de dimensión n, una expresión totalmente antisimetrizada de más de n índices es cero (*cf.* ejercicio 1.1). Éstas son las identidades más duras de manejar, pues suponen resolver sistemas de ecuaciones muy grandes, afectados por los problemas de crecimiento de expresiones intermedias apuntados al principio de esta sección.

F) Identidades dependientes de la signatura. Consideremos ahora expresiones, a las que llamaremos duales, que no solo incluyan tensores de Riemann y derivadas, sino también un único tensor de Levi-Civita. Es posible demostrar que (ver tema 1)

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^{\bar{s}} \det \begin{pmatrix} \delta^{a_1}_{b_1} & \cdots & \delta^{a_n}_{b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{a_1}_{b_n} & \cdots & \delta^{a_n}_{b_n} \end{pmatrix} ,$$

donde $(-1)^{\bar{s}}$ es el signo del determinante de la métrica. A partir de esta expresión, vemos que el producto de dos expresiones duales es una nueva expresión que solamente incluye tensores de Riemann, lo que proporciona relaciones adicionales.

Es fácil probar (EJERCICIO) a partir de las dos propiedades A) y B) que de las 24 posibles ordenaciones de los 4 índices solo R_{abcd} y R_{acbd} son independientes. Es igualmente sencillo ver que solo se puede construir un escalar independiente contrayendo los índices dos a dos. Ahora bien, ¿qué ocurre si formamos escalares contrayendo todos los índices en productos de varios tensores de Riemann? Siendo más ambiciosos: ¿cuántos escalares independientes se pueden formar con monomios de tensores de Riemann cuyos factores puedan incluir derivadas covariantes y qué relaciones hay entre ellos?

[9] S.B. Edgar y A. Hoglund, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 659.

Las respuestas a estas preguntas constituyen un problema esencialmente abierto y de gran complejidad computacional. A partir de laboriosos razonamientos utilizando teoría de grupos o espinores, es posible deducir cuántos monomios independientes aparecen con un determinado número de tensores de Riemann y derivadas covariantes[10]. Sin embargo, el método no es del todo constructivo, de modo que, para obtener una base explícita y poder descomponer un monomio arbitrario en una combinación de sus elementos, es necesario utilizar métodos avanzados de computación algebraica.

A la vista del gran número de relaciones que hay que tener en cuenta, no resulta difícil convencerse de que el problema sigue siendo muy complicado, aun con ayuda informática. En efecto, no solo hay que preocuparse de simetrías de permutación, sino que aparecen también un gran número de relaciones que involucran varios términos. Como adelantábamos al inicio de esta sección, estas últimas son demasiado complicadas como para tratarlas en tiempo real con los métodos actuales. El problema crece además muy rápidamente con el número de tensores de Riemann que queramos multiplicar. En efecto, si tenemos en cuenta que la simetría de un producto de n tenores de Riemann está descrita por un subgrupo de S_{4n}, vemos que el número de elementos a considerar aumenta de forma factorial.

Una solución a este problema la proporciona el paquete *Invar*[11]. Este programa es capaz de descomponer un monomio de tensores de Riemann en varias bases de invariantes independientes. Para ello, reduce en primer lugar el escalar inicial a su forma canónica de acuerdo con las simetrías A) en tiempo real. A continuación, aplica secuencialmente las relaciones B) a F) a partir de una base de datos con miles de reglas previamente calculadas. De este modo, se consigue canonicalizar monomios de hasta siete tensores de Riemann en tiempos inferiores a un segundo. Para tener una idea del número de reglas que supone cada tipo de identidad, el cuadro siguiente recoge el número de escalares independientes después de cada paso en dimensión 4. Por simplicidad, solo se incluyen productos de uno a siete tensores de Riemann sin derivadas, por lo que las relaciones C) y D) no se aplican. Las columnas con un asterisco hacen referencia a los invariantes duales.

[10]Para más detalles puede verse la referencia "S.A. Fulling *et al.*, *Class. Quantum. Grav.* **9** (1992) 1151".

[11]J.M. Martín-García, R. Portugal y L. Manssur, *Comp. Phys. Comm.* **177** (2007) 640.

N	$(4N)!$	A	A*	B	B*	E	E*	F	F*
1	24	1	1	1	0	1	0	1	0
2	40 320	3	4	2	1	2	1	2	1
3	$\sim 10^8$	9	27	5	6	3	2	3	2
4	$\sim 10^{13}$	38	232	15	40	4	1	3	1
5	$\sim 10^{18}$	204	2 582	54	330	5	2	3	2
6	$\sim 10^{23}$	1 613	35 090	270	3 159	8	2	4	2
7	$\sim 10^{29}$	16 539	558 323	1 639	–	7	1	3	1

Vemos que la disminución más grande es, con mucho, la producida por las simetrías monotérmino. Esto permite confeccionar una base de datos de soluciones para el resto. Aparecen en total unas pocas decenas de invariantes hasta orden siete después de aplicar todos los pasos. Si introducimos derivadas, el número de escalares independientes se dispara: más de mil para monomios con hasta doce derivadas de la métrica (contando cada Riemann como dos derivadas).

Apéndice A

Topología

El apéndice A de la referencia [2] contiene un resumen de los conceptos topológicos básicos necesarios para estudiar la estructura del espaciotiempo. A continuación, se presentan algunos de estos conceptos.

- Una aplicación entre dos espacios topológicos es un *homeomorfismo* si y solo si tanto ella como su inversa son biyecciones continuas. Los homeomorfismos preservan las propiedades topológicas.
- Un espacio topológico es *Hausdorff* si y solo si todo par de puntos posee entornos abiertos disjuntos.
- Un espacio topológico es *paracompacto* si y solo si todo recubrimiento mediante abiertos admite un refinamiento localmente finito, es decir, tal que cada punto de la variedad pertenece a un abierto del refinamiento con intersección no nula con solo un número finito de abiertos del refinamiento.
- Un subconjunto S de un espacio topológico T es *cerrado* en T si y solo si su complemento $T - S$ es abierto. La intersección arbitraria de cerrados es cerrada. La unión finita de cerrados es cerrada.
- Un espacio topológico es *conexo* si y solo si los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez son el conjunto vacío y él mismo.
- El *interior* $\mathrm{int}(S)$ de S es la unión de todos los abiertos contenidos en S. Un subconjunto es abierto si y solo si coincide con su interior.
- El *cierre* $\bar{S}$ en $S \subset T$ es la intersección de todos los cerrados del espacio topológico T que contienen a S. Un subconjunto es cerrado si y solo si coincide con su cierre.
- La *frontera* ∂S en T es el conjunto de puntos del cierre de S en T que no están en el interior de S, es decir, $\partial S = \bar{S} - \mathrm{int}(S)$.
- Un subconjunto S de T es *compacto* si y solo si todo recubrimiento mediante abiertos (conjunto de abiertos cuya unión contiene a S) contiene un subrecubrimiento finito. Todo subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado. Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado. El producto de dos espacios topológicos compactos es compacto.